MATEMÁTICAS 3
Secundaria

Carlos Armando Cuevas Vallejo
Óscar González Ortiz
Carolina Rubí Real Ortega
Arturo Rodríguez Espinosa

ríosdetinta S.A. DE C.V.

SEP
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

60 años

Matemáticas 3. Secundaria de Carlos Armando
Cuevas Vallejo Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav),
Óscar González Ortiz, Carolina Rubí Real Ortega y
Arturo Rodríguez Espinosa se editó y publicó
por Ríos de Tinta, S.A. de C.V.
Primera edición, 2014
Quinta reimpresión, 2019
ISBN: 978-607-7586-48-7
D.R. © Ríos de Tinta, S.A. de C.V.
Morelos 16, Centro,
México, Ciudad de México, C.P. 06040.
Teléfono (55) 51404900, ext. 31957
www.riosdetinta.com

Dirección editorial Ma. Georgina Adame Moreno

Coordinación de diseño e iconografía S. Gabriela Badillo Hernández

Edición Jorge Alberto Limón Jiménez

Diseño S. Gabriela Badillo Hernández

Formación Yatzaret Gómez Castillo, Israel Peña Jurado
Portada S.Gabriela Badillo Hernánadez
Corrección de estilo y cuidado editorial Paulina Monroy Guevara, Ada Pantoja Zúñiga
Investigación y gestión iconográfica Gabriela Ortiz Nava, Aidee Santiago Ramírez
Ilustraciones Iván Cervantes Arriola, Sara Jiménez Casellas, Israel Peña Jurado,
Estudio GAM / Gustavo Armando Rodríguez Sánchez, Emmanuel Alejandro Galván
Soreque y Mario Daniel Garza Ledesma

Impreso en México
Miembro de la Cámara Nacional
de la Industria Editorial Mexicana.
Registro número 3483.

Agradecimiento
A los archivos fotográficos de los museos
y las entidades públicas que nos han
proporcionado material iconográfico.
La editorial está a disposición de los
poseedores de los derechos eventuales
de fuentes bibliográficas e iconográficas
no identificadas.

Matemáticas 3. Secundaria
Esta obra se terminó de imprimir en
julio de 2019, en los talleres de
Multigráfica Publicitaria S.A de C.V.,
Democracias 116, Col. San Miguel Amantla,
C.P. 02700, Azcapotzalco, Ciudad de México.

MATEMÁTICAS 3
Secundaria

ríosdetinta
S.A. DE C.V.

Palabras dirigidas a los ALUMNOS

MATEMÁTICAS 3

Cualquiera que sea el lugar donde vivas, tendrás problemas en los que tengas que utilizar las matemáticas: ¿cuánto es $\frac{3}{4}$ de kilo de algún producto?, ¿cuál es su precio si en oferta me descuentan 35%?, ¿cuántas golosinas me tocarían si tengo que repartirlas entre cinco compañeros?, ¿cómo uso la calculadora científica o algún *software*?, ¿cómo mido y registro el crecimiento de una planta?, ¿cómo calculo el área y volumen de terrenos y recipientes, respectivamente?

Las matemáticas te permiten resolver estos y otros problemas. Debido a ella, hoy contamos, por ejemplo, con computadoras, tabletas, iPods, internet, Google, Facebook; podemos viajar por tierra, mar y aire y contamos con la resonancia magnética y las tomografías, que permiten a los médicos explorar nuestro cuerpo, sin necesidad de abrirlo, y hacer un diagnóstico oportuno de enfermedades.

Aprender matemáticas nos proporciona elementos para entender cómo funcionan estas innovaciones y permite desarrollar nuevos aparatos y dispositivos que serán útiles a nuestra sociedad.

Recuerda que si bien el aprendizaje es individual, tu libro, tu maestro y tus compañeros te acompañarán para plantear y resolver diferentes tipos de problemas, así como interpretar y compartir información matemática al explicar y justificar soluciones relacionadas con la vida cotidiana.

Tenemos la convicción de que las matemáticas se pueden aprender con paciencia y voluntad, como casi todo en la vida, y que una vez que adquieras cierto nivel, te resultarán divertidas y principalmente, atractivas.

Palabras dirigidas a los PROFESORES

Tiene en sus manos el tercer libro de matemáticas para la educación secundaria. Este libro es producto fundamentalmente de tres aspectos: la experiencia docente, la investigación en didáctica, pedagogía y en matemáticas, y la aplicación de las tecnologías digitales para promover herramientas que permitan mejorar el proceso de aprendizaje.

Hemos dispuesto los contenidos matemáticos de acuerdo con el esquema de desarrollo por competencias, donde la actividad corresponde al estudiante, y para introducir los diversos temas de matemáticas se acude a problemas reales y cotidianos con la intención de que el estudiante vea en las matemáticas no a una ciencia abstracta y ajena a sus intereses, sino a una ciencia que le proporciona herramientas para interpretar a la naturaleza y a la sociedad, a la vez que le dota de un pensamiento lógico matemático que le permitirá entender muchos de los fenómenos cotidianos o procesos económicos y sociales, y así poder plantear soluciones alternativas.

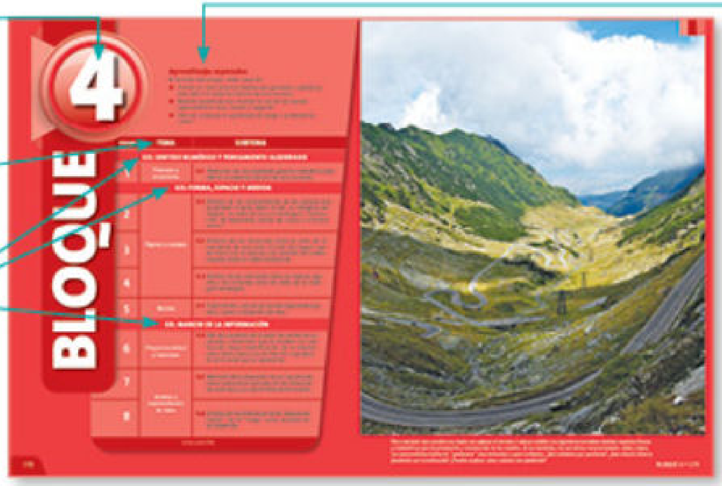
Además, hemos graduado los niveles de complejidad de los temas de matemáticas presentados, en cada lección de cada bloque, de lo más simple a lo más complejo, con la intención de que le permita al alumno construir, poco a poco, las diversas reglas algorítmicas y teoremas necesarios para simplificar la tarea en aritmética, álgebra, probabilidad, estadística, geometría y demás temas.

Esta preparación le permitirá al alumno, por una parte, estar dotado con los elementos suficientes para interactuar con la sociedad actual y, por otra, el acceso a los niveles de educación más avanzados.

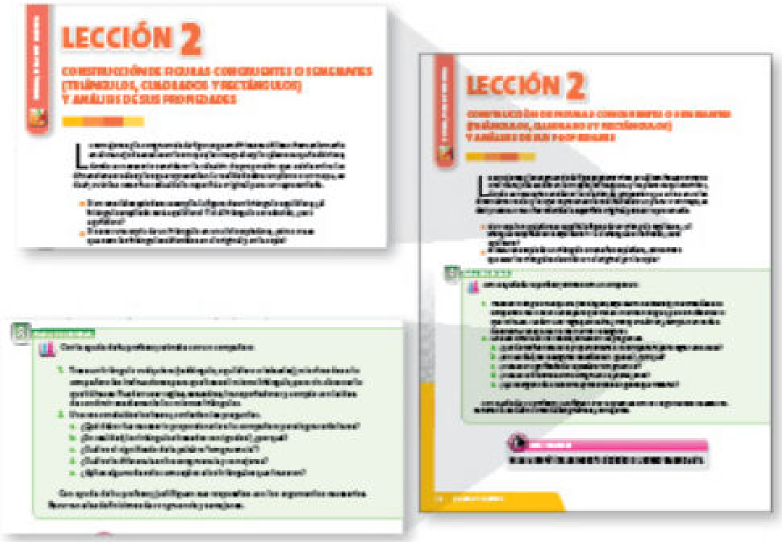
Finalmente, usted, mediante la aplicación y la evaluación de los materiales adecuados, puede ayudar a mejorar el material presentado, y quien dirá si el trabajo resultó adecuado para alcanzar el fin pretendido, que es dotar a los estudiantes de una herramienta invaluable para interactuar con el cada vez más complejo mundo que nos rodea.

PARA TRABAJAR CON TU LIBRO

El libro que tienes en tus manos se divide en cinco bloques y, a su vez, cada bloque se divide en varias lecciones. A continuación te presentamos cómo está organizado con el fin de que se convierta en una herramienta eficiente y útil.

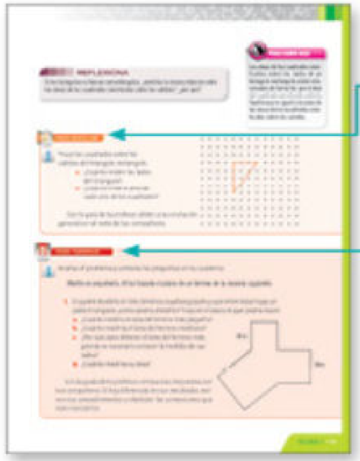


Cada lección inicia con un texto para introducirte al tema que trata. Aquí encontrarás una forma amena de relacionar el contenido de la lección con situaciones históricas y de tu vida cotidiana.



PARA COMENZAR En la sección **Para comenzar** se presenta una actividad breve que te permite recordar algunos conocimientos sobre el tema, ejercitar tus aprendizajes adquiridos y reflexionar sobre posibles maneras de resolver un problema.

Cada lección está conformada por actividades, con las cuales practicarás y formalizarás el conocimiento.

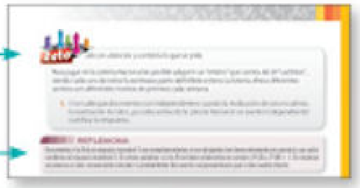


PARA RESOLVER La sección **Para resolver** propone ejercicios que te permitirán reflexionar sobre los temas estudiados y desarrollar tus capacidades.

PARA TERMINAR La sección **Para terminar** es una actividad que reúne en una situación problemática lo que estudiaste durante la lección. Aquí tienes la posibilidad de reafirmar los conocimientos adquiridos, practicar tus habilidades y desarrollar tus capacidades.

En cada bloque, además, encontrarás las secciones siguientes.

Reflexiona
Son actividades en las que reflexionarás y responderás algunas preguntas acerca de los temas que estás estudiando. Esta sección te ayudará a saber cómo es el progreso de tus avances y de tus nuevos conocimientos.



Reto
Son actividades que estimularán tu capacidad de análisis y con las que demostrarás cuánto has aprendido en algunas lecciones.

Tarea en casa
Es indispensable que refuerces tus conocimientos fuera del aula, por lo que te proponemos ejercicios y problemas para que sigas ejercitando algunos temas.

Matemáticas históricas
Los conceptos, teorías e ideas que estás estudiando no aparecieron de repente, son producto de años de investigación. Esta sección contiene información acerca de personajes, acontecimientos y descubrimientos relevantes en la historia de las matemáticas, que fue retomada de fuentes bibliográficas.

Lecturalia
Aquí encontrarás sugerencias de lecturas que puedes aprovechar para desarrollar tus conocimientos e imaginación científica.

TIC
En este espacio encontrarás fuentes de consulta y ejercicios en línea para que pongas en práctica tus habilidades y estimules tus competencias. Además de algunos ejercicios con *software* que seguro tienes en tu computadora.

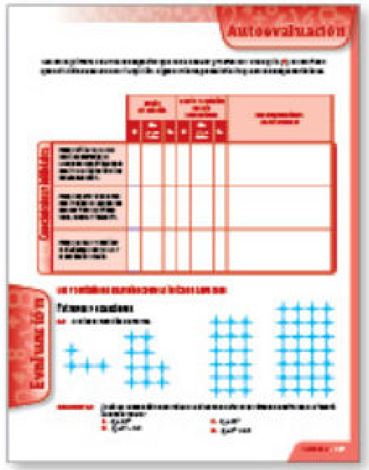
Para saber más
Esta sección te ofrece información adicional sobre los temas de cada lección.

Aforismos
Se trata de una cápsula en la cual encontrarás frases relacionadas con las matemáticas y el pensamiento científico, atribuidas a personajes célebres. Esta información te ayudará a comprender mejor el pensamiento matemático y su relación con otros campos del conocimiento. En la bibliografía se consignan las fuentes de donde se tomaron.

Historia de las palabras
Aquí resolverás tus dudas sobre algunas palabras, desde su etimología hasta algunos casos de cómo evolucionaron éstas dentro del lenguaje matemático.

Iconos
Antes de realizar las actividades debes saber si trabajarás de manera individual, en parejas, en equipo o en grupo; guíate con los iconos siguientes.

Individual — Equipo
Parejas — Grupo



Autoevaluación y Evaluación
Al final de cada bloque podrás, con la ayuda de tu profesor, comprobar qué has aprendido y en qué debes mejorar.

ÍNDICE

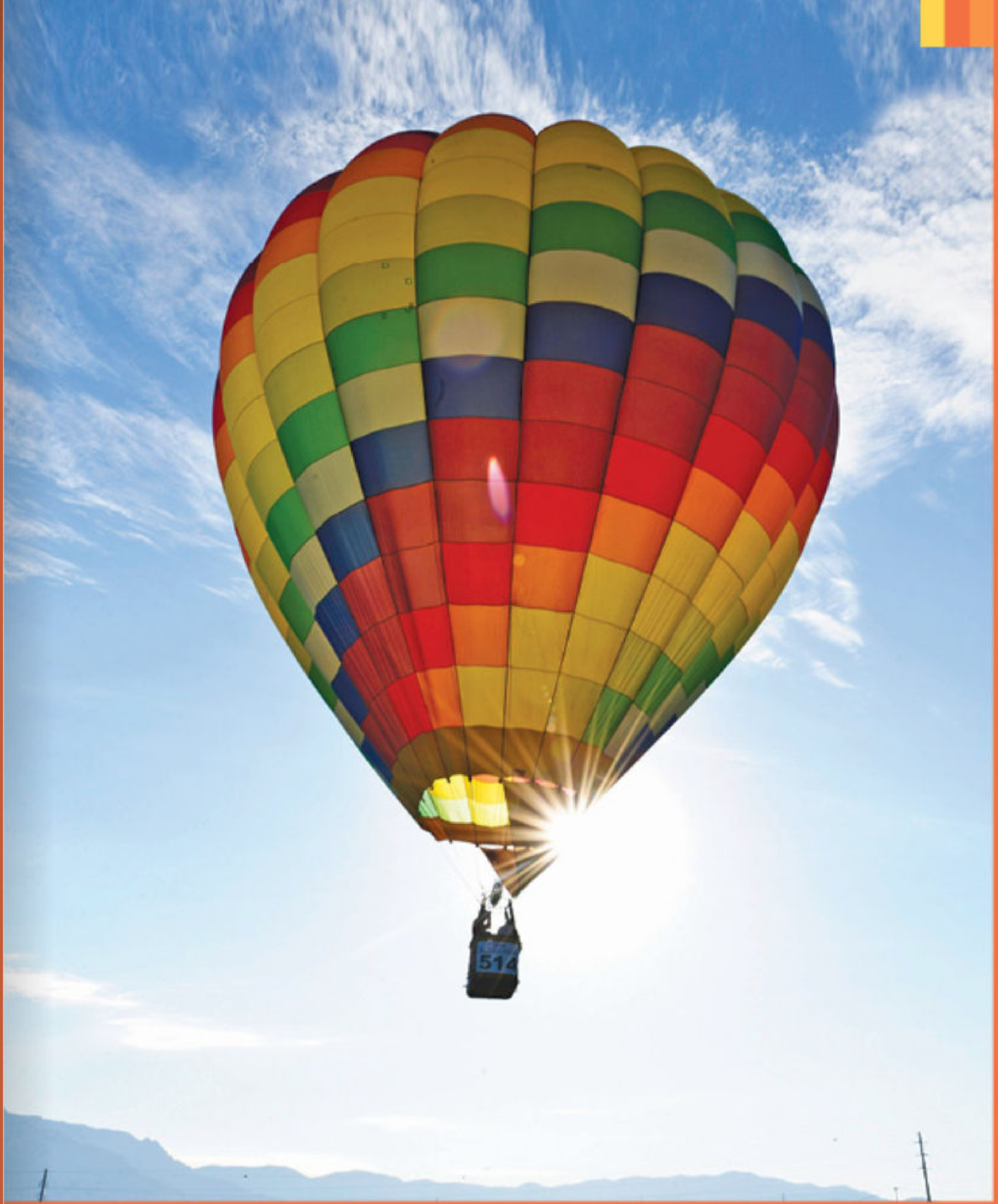
BLOQUE 1

Aprendizajes esperados

Al finalizar este bloque, serás capaz de lo siguiente.

- Explicar la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

SEMANA	TEMA	SUBTEMA
EJE: SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO		
1	Patrones y ecuaciones	1.1 Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.
EJE: FORMA, ESPACIO Y MEDIDA		
2	Figuras y cuerpos	1.2 Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.
3		1.3 Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.
EJE: MANEJO DE LA INFORMACIÓN		
4	Proporcionalidad y funciones	1.4 Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad.
5		1.5 Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la Física, la Biología, la Economía y otras disciplinas.
6	Nociones de probabilidad	1.6 Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.
7	Análisis y representación de datos	1.7 Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.
EVALUACIÓN		



Los globos aerostáticos se elevan porque el aire caliente en su interior es menos denso que el aire circundante. Por su gran tamaño pueden contener un gran volumen de aire y deben fabricarse con materiales que a la vez sean ligeros y resistentes. Un trayecto de ascenso y descenso de un aerostato puede representarse mediante una ecuación cuadrática. ¿Puedes decir cuáles son los diferentes tipos de ecuaciones cuadráticas y cómo se resuelven?

SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO

LECCIÓN 1

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE IMPLIQUEN EL USO DE ECUACIONES CUADRÁTICAS SENCILLAS, UTILIZANDO PROCEDIMIENTOS PERSONALES U OPERACIONES INVERSAS

¿Sabes cómo calculan los agricultores la longitud de los lados de un terreno rectangular para que abarque un área determinada? ¿Tienes idea de cómo aplican el álgebra los arquitectos para diseñar habitaciones que cumplan con ciertas medidas de perímetro y superficie? ¿Cómo describen los físicos el movimiento de un objeto al caer? Como éstas, existen muchas otras situaciones que, al modelarlas matemáticamente, resultan en ecuaciones de segundo grado. ¿Sabes qué es una ecuación de segundo grado, qué formas puede adoptar y cómo se resuelve?

PARA COMENZAR

Lean el problema y respondan en su cuaderno lo que se indica más adelante.

Antonio elabora el plano de una casa. El terreno tiene forma de cuadrado, donde cada uno de sus lados mide x. En una de las esquinas del terreno construirá un garaje de forma rectangular, como se muestra en la imagen de la derecha. Partiendo de estas consideraciones, contesta las preguntas siguientes.

Terreno de Antonio. El área de color representa el espacio destinado al garaje.

1. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área A_c de todo el terreno?
   a. El largo del garaje medirá la mitad de la longitud de uno de los lados del terreno y el ancho medirá un cuarto de la longitud de otro de los lados del terreno. Con esta información, representa algebraicamente el área A_g del garaje.
   b. Tomando en cuenta las medidas anteriores, se desea que el área A_g que abarque el garaje sea $A_g = 18\ m^2$. ¿Cuál es la ecuación que representa el área del garaje?
   c. ¿Cómo podrías dar solución a la ecuación?, ¿cuál o cuáles son los números que satisfacen la ecuación?
   d. ¿Cuánto mide el largo y el ancho del garaje?

Con la guía del profesor, comparen los resultados que obtuvieron y expliquen cómo resolvieron el problema.

PARA SABER MÁS

En las situaciones de la página anterior están implícitas las ecuaciones de segundo grado o ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 = c$, donde $a \neq 0$, para resolverlas has utilizado operaciones inversas.

Problemas que se resuelven con ecuaciones cuadráticas

En Física se sabe que al dejar caer un cuerpo desde el reposo, el cuerpo recorre una distancia debido a la acción de la gravedad g dada por $d(t) = 4.9\ t^2$, donde 4.9 es la mitad de la aceleración de la gravedad y t es el tiempo transcurrido desde que se deja caer el objeto.

1. Completa la tabla determinando el tiempo que transcurre cuando un objeto en caída libre ha recorrido las distancias siguientes.

Distancia recorrida en metros (d)	Tiempo transcurrido en segundos (t)
1.90	
3.80	
5.0	
28.0	

2. ¿Cuánto tiempo transcurre desde que se deja caer un objeto hasta que toca el suelo si se deja caer desde la Torre Latinoamericana, que mide 182 m de altura?
3. Explica cómo resolviste el problema.
4. Dibuja los resultados obtenidos en una gráfica como la de la página siguiente y analiza: ¿qué significa que la curva esté cada vez más inclinada hacia arriba?

Galileo descubrió que en el vacío todos los objetos caen al mismo tiempo.

PARA SABER MÁS

No todas las ecuaciones cuadráticas tienen soluciones reales. Considera, por ejemplo, la ecuación $x^2 + 1 = 0$. Si procedemos como hasta ahora, $x^2 = -1$ y de ahí que $x = \sqrt{-1}$, donde se observa que no hay ningún número que elevado al cuadrado dé un número negativo. Esto significa que la raíz cuadrada de -1 no es un número real. El gran matemático Euler asignó el símbolo "i" a la raíz cuadrada de -1, es decir, $i = \sqrt{-1}$ y dedicó esfuerzos en el estudio de estos nuevos números llamados "imaginarios o complejos".

AFORISMOS

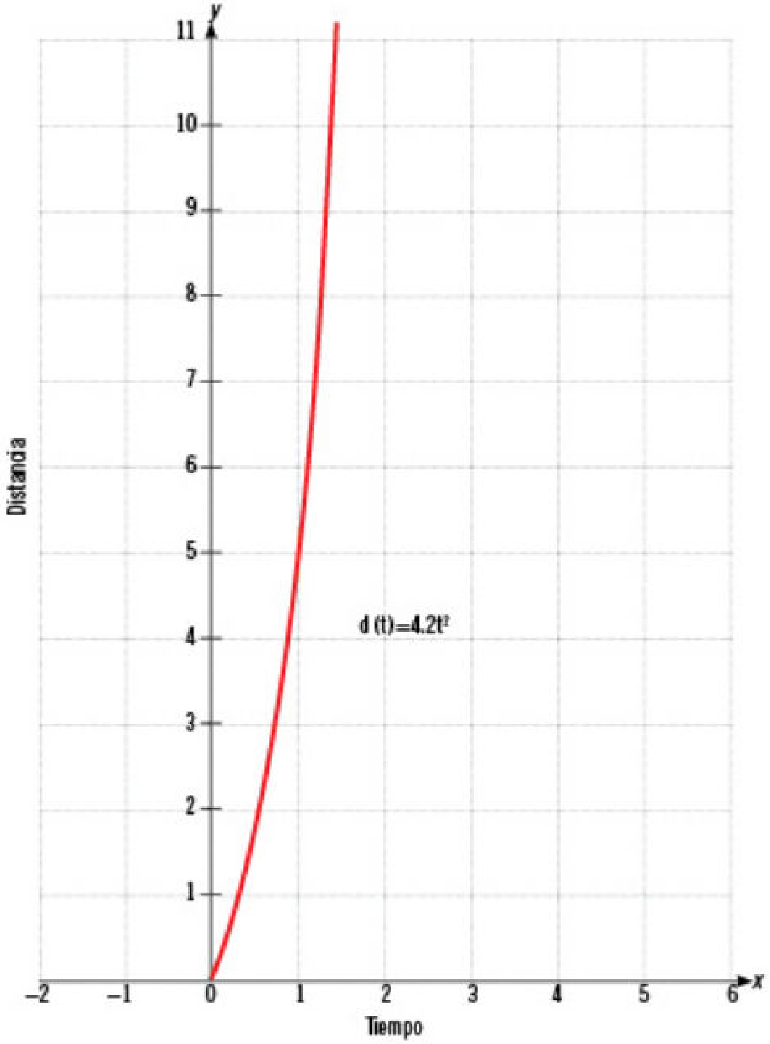
"No hay rama de la matemática, por abstracta que sea, que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del mundo real."

Nikolay Lobachevsky (1792-1856), matemático ruso.

Menciona una situación en la que hayas aplicado las matemáticas para resolver algún problema de tu vida cotidiana.

LECTURALIA

Te recomendamos leer el capítulo 6 "Ecuaciones de Segundo grado" del libro *Álgebra recreativa* de Yakov Perelman; lo puedes descargar de manera gratuita del sitio http://www.librosmaravillosos.com/algebrarecreativa/ (consultado el 17 de marzo de 2016).



Con ayuda de tu profesor, compara los resultados que obtuviste con los de tus compañeros. Expliquen cómo resolvieron el problema. Si existen diferencias, discutan por qué y lleguen a acuerdos.

Reto

Con la guía de tu profesor, realiza lo que se pide.

1. Escribe las ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 = c$, cuyas soluciones sean:
   a. 12 b. 25 c. 40
2. Escribe las ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 = c$, donde a es una fracción o número racional, que tengan las soluciones siguientes.
   a. 12 b. 25 c. 40

PARA RESOLVER

Las siguientes ecuaciones de segundo grado, corresponden al área de diferentes cuadrados. Resuélvelas y determina el valor del lado de cada una de las figuras que representan.

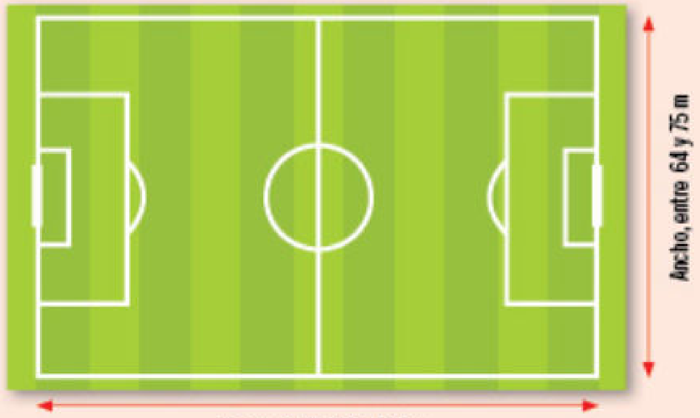
1. $x^2 - 144 = 0$
2. $\frac{1}{5}x^2 + 10 = 240$
3. $y^2 + 8 = 33$
4. $\frac{1}{2}y^2 - 71 = 22$
5. $-x^2 - 15 = -240$

Con la guía de tu profesor compara tus respuestas con otro compañero y lleguen a una conclusión común sobre la resolución de ecuaciones cuadráticas.

PARA TERMINAR

Revisa la información que se presenta y contesta en tu cuaderno las preguntas que se formulan.

Las medidas de las canchas de futbol en las escuelas pueden ser diferentes debido a la cantidad de terreno disponible. Si en tu escuela hay cancha para jugar, indaga cuánto mide.



Medidas oficiales de una cancha de futbol.

1. El área de una cancha de futbol mide 4 050 m². Si el largo mide lo doble de lo que mide el ancho, contesta.
   a. ¿Cuál es la ecuación cuadrática que nos permite obtener las medidas de la cancha?
2. Si el área de una cancha de futbol rápido midió 1587 m² y el ancho es un tercio del largo, responde.
   a. ¿Cuál es la ecuación cuadrática que nos permite obtener las dimensiones de la cancha?
   b. ¿Cuánto miden las dimensiones de la cancha?

Con la ayuda de tu profesor, comparte las respuestas con tus compañeros. Si en tu escuela hay cancha de futbol, compara sus medidas con las que obtuviste. ¿La dimensión de la cancha escolar es mayor o menor que en los problemas anteriores?

LECCIÓN 2

FORMA, ESPACIO Y MEDIDA

CONSTRUCCIÓN DE FIGURAS CONGRUENTES O SEMEJANTES (TRIÁNGULOS, CUADRADOS Y RECTÁNGULOS) Y ANÁLISIS DE SUS PROPIEDADES

La semejanza y la congruencia de figuras geométricas se utilizan frecuentemente en el manejo de escalas en los mapas, las maquetas y los planos arquitectónicos, donde es necesario considerar la relación de proporción que existe entre las dimensiones reales y las que representan la realidad sobre un plano o un mapa, es decir, cuántas veces fue reducida la superficie original para ser representada.

- Si en una fotocopiadora se amplía la figura de un triángulo equilátero, ¿el triángulo ampliado será equilátero? Y si el triángulo es reducido, ¿será equilátero?
- Si sacas una copia de un triángulo en una fotocopiadora, ¿cómo crees que serán los triángulos obtenidos en el original y en la copia?

PARA COMENZAR

Con la ayuda de tu profesor, reúnete con un compañero.

1. Traza un triángulo cualquiera (rectángulo, equilátero o isósceles), mientras das a tu compañero las instrucciones para que trace el mismo triángulo, pero sin observar lo que tú haces. Pueden usar reglas, escuadras, transportadores y compás con la idea de construir exactamente los mismos triángulos.
2. Una vez concluidos los trazos, contesten las preguntas.
   a. ¿Qué datos fue necesario proporcionarle a tu compañero para lograr esta tarea?
   b. ¿En realidad, los triángulos trazados son iguales?, ¿por qué?
   c. ¿Cuál es el significado de la palabra "congruencia"?
   d. ¿Cuál es la diferencia entre congruencia y semejanza?
   e. ¿Aplica alguno de estos conceptos a los triángulos que trazaron?

Con ayuda de tu profesor, justifiquen sus respuestas con los argumentos necesarios. Recurran a las definiciones de congruencia y semejanza.

PARA SABER MÁS

Dos figuras geométricas son congruentes si coinciden al superponer una sobre la otra.

PARA SABER MÁS

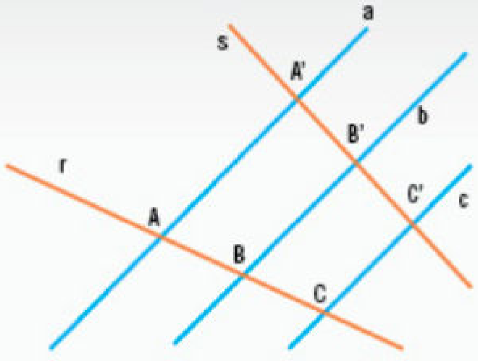
Tales de Mileto descubrió que los objetos y sus sombras forman entre sí triángulos semejantes. A partir de esta idea logró medir la altura de la pirámide de Keops: midió primero la sombra de la pirámide.

Uno de los dos teoremas que llevan su nombre se refiere a esta situación, ya que establece las condiciones para determinar la semejanza de triángulos:

"Si dos rectas r y s cortan a las rectas paralelas a, b y c, los segmentos AB, BC y AC son proporcionales a los segmentos A'B', B'C' y A'C' correspondientes en la recta s."

La proporcionalidad entre los segmentos se puede expresar como:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} \quad o \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$

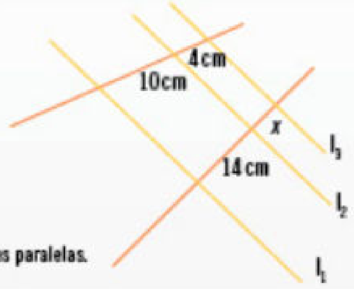


Par de rectas cortadas por tres paralelas.

Reto

Analiza el planteamiento siguiente y realiza lo que se indica.

En la figura, las rectas l_1, l_2 y l_3 son paralelas. Si los segmentos mostrados son proporcionales, según el teorema de Tales, determina la longitud del segmento *x*.



Dos rectas cortadas por tres paralelas.

Construcción de figuras planas

1. Construye las figuras que se indican. Utiliza los segmentos que se muestran para construir, en tu cuaderno, un cuadrilátero.
2. Contesta las preguntas.
   a. ¿Cuántos cuadriláteros distintos se pueden construir con los cuatro segmentos dados?
3. Con la coordinación de tu profesor, compara tu cuadrilátero con los que hicieron tus compañeros.
   a. ¿Son iguales?, ¿por qué?

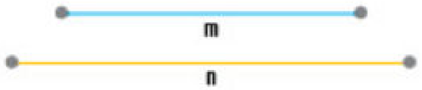
4. Utiliza los segmentos siguientes para construir un triángulo.

a. ¿Cuántos triángulos diferentes puedes construir con los segmentos dados?

5. Compara tu triángulo con los de tus compañeros.
   a. ¿Todos son iguales?, ¿en qué son distintos unos de otros?
   b. Si los pudieras mover, ¿se podrían superponer uno sobre otro de manera que coincidan?

6. Con la guía del profesor, discutan sus respuestas y analicen por qué pueden o no ser distintos.

7. En tu cuaderno construye un triángulo de manera que los segmentos m y n sean dos de sus lados. Utiliza regla y compás.



8. Recorta el triángulo que construiste y compáralo con los que hicieron cuatro de tus compañeros. ¿Cuántos triángulos distintos construyeron?

MATEMÁTICAS HISTÓRICAS

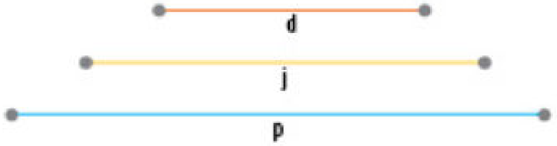
Tales de Mileto (624 a.n.e.-546 a.n.e.) es considerado uno de los siete sabios de Grecia. A partir de su descubrimiento sobre semejanza de triángulos, también podía estimar la distancia a la que se encontraban los barcos de la costa.

Varios siglos después, Eratóstenes (276 a.n.e.-194 a.n.e.), otro sabio de la antigua Grecia, utilizó la idea de semejanza para estimar el radio de la Tierra, pues el concepto de "semejanza" se puede aplicar a todas las figuras geométricas.

En la actualidad convivimos cotidianamente con la semejanza al utilizar fotocopiadoras, maquetas, mapas, planos arquitectónicos, *zoom*, entre otros.

Fuente: *Historia y Filosofía de las matemáticas*, de Ángel Ruiz, y Centro Virtual de Divulgación de las Matemáticas.

9. Ahora, con los segmentos d, j y p, empleando regla y compás, construye un triángulo que tenga esos segmentos como lados.

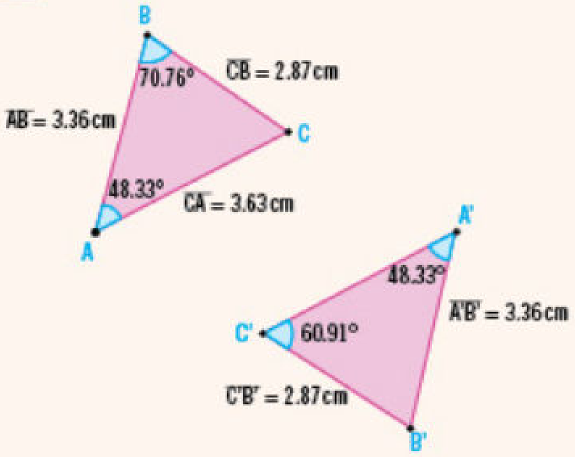


10. Recorta el triángulo construido y compáralo con los triángulos de tus compañeros.
   a. ¿Cuántos triángulos diferentes se pueden construir con estos tres segmentos?

Con ayuda de tu profesor, discute con tus compañeros los resultados obtenidos y escriban una conclusión de manera conjunta.

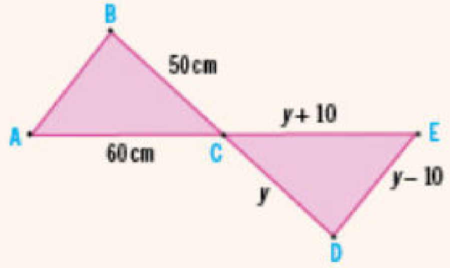
PARA RESOLVER

1. Analiza los triángulos.



2. Considerando esa información calcula lo siguiente.
   a. El valor de $\overline{A'C'}$ ____
   b. El valor del $\angle B'$ ____
   c. El valor del $\angle C$ ____

3. En la figura, $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ son paralelos. Determina el valor de $\overline{CE}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DE}$.



TIC

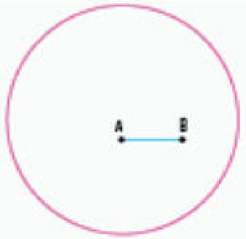
Con la ayuda de programas para computadora o *software* libre, se pueden construir figuras congruentes. Por ejemplo, con GeoGebra se puede construir un triángulo congruente, conocidos sus tres lados (LLL).

1. Se tiene un triángulo cuyas medidas son 3, 6 y 8. Traza una recta utilizando la herramienta **Segmento dados Punto Externo y Longitud**.

2. Da clic en un punto de la pantalla y, en la ventana que se abre, introduce el valor de cualquiera de los tres lados. En este caso escribiremos **3**. Después presiona **OK**.

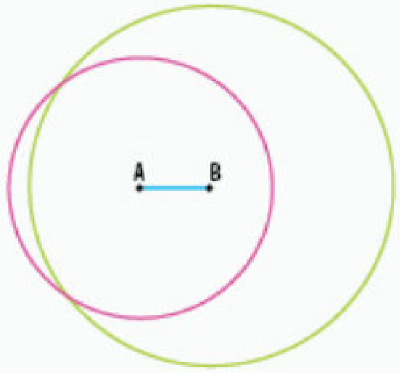
3. Traza una circunferencia en cualquiera de los extremos de la recta, en este caso en el punto A; utiliza la herramienta **Circunferencia dados su Centro y Radio**. Se hace clic en el punto A y se abre una ventana donde se introduce el valor de cualquiera de los lados que faltan, en este caso introducimos el valor **6** y presionamos el botón **OK**.

¿Por qué piensas que se ha trazado la circunferencia de radio 6?

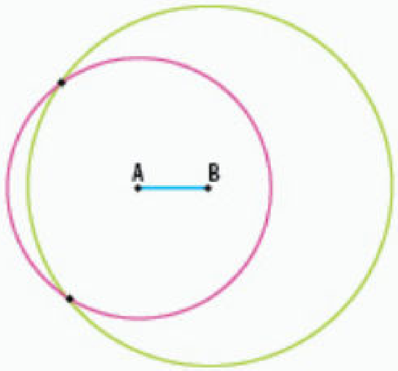


Continúa...

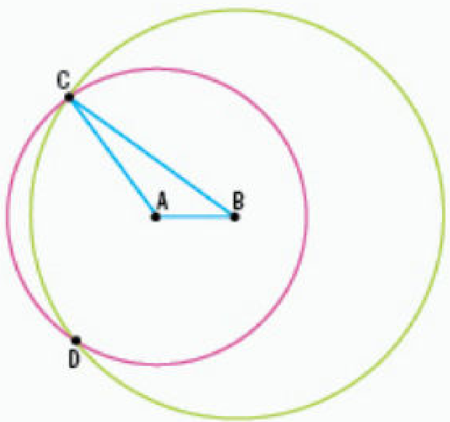
4. Con la herramienta **Circunferencia dados su Centro y Radio** se hace clic en el punto B y en la ventana se escribe el valor del lado restante: 8. Después se presiona el botón **OK**.
¿Qué observas al trazar la otra circunferencia?



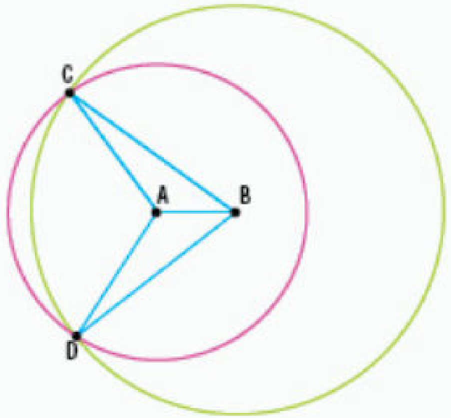
5. Ahora con la herramienta **Intersección de Dos Objetos** activa, haz clic en una de las circunferencias y luego en la otra para encontrar los puntos donde se cortan. ¿En cuántos puntos se cortan las circunferencias?



6. Para unir el punto C con los puntos A y B con los segmentos de la recta, utiliza la herramienta **Segmento entre Dos Puntos**, haz clic en el punto A y luego en el punto D, con esto se forma el segmento AC. Para $\overline{BC}$, haz clic en el punto B y luego en el punto D. Se forma el triángulo ABC. Al unir los puntos A y B con el punto C, se genera un triángulo ABC.



7. Para unir el punto D con los puntos A y B con los segmentos de la recta, utiliza la herramienta **Segmento entre Dos Puntos**, haz clic en el punto A y luego en el punto D para formar el segmento AD. Para $\overline{BD}$, haz clic en el punto B y luego en el punto D. Se forma el triángulo ABD. Escribe en tu libreta, con tus palabras, cuál es el criterio utilizado en este caso para saber si los triángulos son congruentes.



Traslado de ángulos y figuras semejantes

Con la guía de tu profesor, sigue las indicaciones y resuelve.

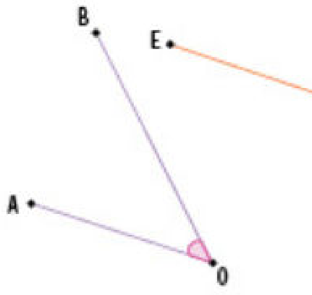


Figura 1

1. Construye en tu cuaderno el ángulo AOB y el segmento DE como se muestra en la figura 1.
2. Traza una circunferencia con centro en el vértice O de un radio menor que la longitud de los lados que forman el ángulo. Nombra M y N a los puntos de intersección de la circunferencia con los lados del ángulo como se muestra en la figura 2.
3. Con el mismo radio, construye una circunferencia con centro en el extremo D del segmento DE. Nombra Q al punto donde la circunferencia corta al segmento como se muestra en la figura 3.
4. Con tu compás obtén la distancia entre los puntos M y N y traza una circunferencia de radio MN con centro en el punto Q. Nombra T al punto donde se corten las dos circunferencias como en la figura 4.
5. Traza el segmento de recta que une los puntos Q y T.
6. Con tu transportador mide los ángulos AOB y QDT y responde.
   a. ¿Cómo son estos dos ángulos?
   b. Después de realizar esta construcción, ¿consideras que puedes trazar ángulos sin utilizar el transportador?

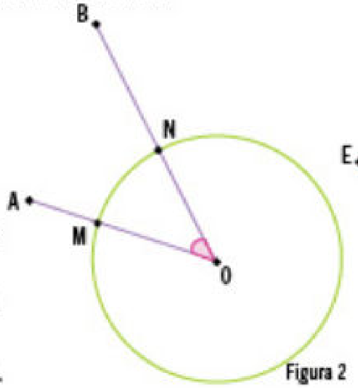


Figura 2

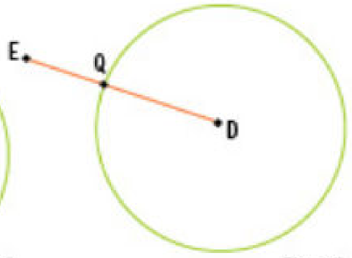


Figura 3

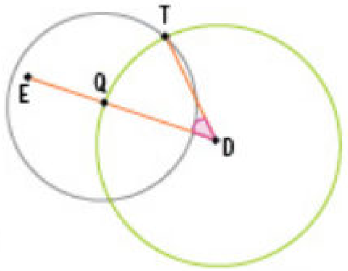
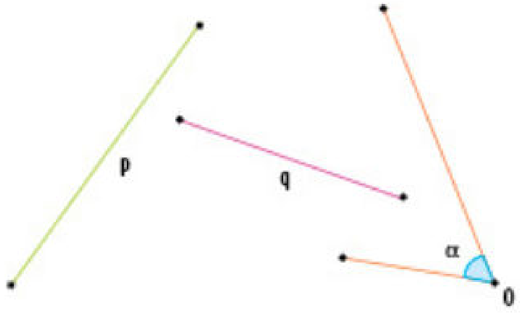


Figura 4

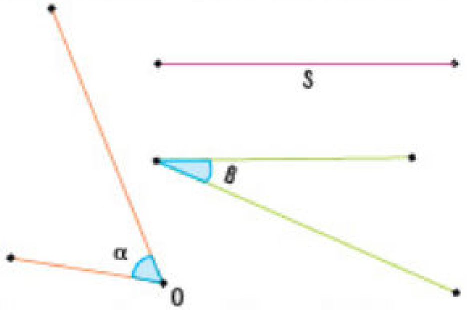
Con ayuda de tu profesor, discute tu opinión con tus compañeros. En caso de tener resultados diferentes, verifiquen su procedimiento y efectúen las correcciones necesarias.

En coordinación con su profesor, formen equipos de cuatro integrantes.

1. Cada integrante del equipo construya un triángulo que tenga como lados los segmentos p y q, de modo que $\angle\alpha$ sea el ángulo comprendido entre ellos, como se muestra en la figura de la derecha. Usen regla y compás.



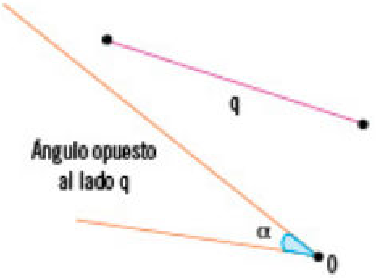
2. Comparen su triángulo con el de sus compañeros. ¿Qué observan?
3. Planteen ahora otro par de segmentos y otro ángulo y repitan la actividad. ¿Cuántos triángulos diferentes se pueden construir con estos tres elementos?
4. Discutan sus respuestas con sus compañeros. En caso de tener resultados diferentes, pidan a su profesor que verifique su procedimiento y efectúen las correcciones que les indique.



1. Con el segmento S y los dos ángulos de la figura, construye un triángulo que tenga como lados a dicho segmento, de manera que sus ángulos adyacentes sean los ángulos α y β de la figura.
2. Compara el triángulo obtenido con los de otros compañeros, ¿qué características presentan?, ¿qué criterio están empleando para establecerlas?
3. Propón otro par de ángulos y otro lado, y repite la actividad.
   a. ¿Cuántos triángulos diferentes se pueden construir con estos tres elementos?

Discute las respuestas con tus compañeros.

1. Construye un triángulo con los elementos que se proporcionan en la figura (un lado y el ángulo opuesto a ese lado).
2. Compara tu triángulo con los de tus compañeros.
   a. ¿Son congruentes todos los triángulos que construyeron en el grupo?
   b. ¿Puedes construir un único triángulo conociendo un lado y el ángulo opuesto a él?

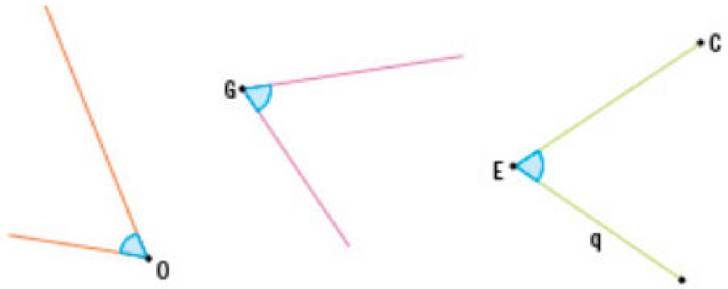


Discute tus respuestas con tu profesor y compañeros para llegar a una conclusión común.

1. Reúnete con tu equipo y respondan: ¿se puede construir un triángulo que tenga como ángulos interiores los ángulos mostrados en la figura siguiente? Efectúen los trazos necesarios para responder esta pregunta.

PARA SABER MÁS

Si en dos triángulos, dos lados y el ángulo comprendido entre esos lados miden respectivamente lo mismo, los triángulos son congruentes; a este criterio se le conoce como "lado-ángulo-lado" (LAL).



2. Comparen su triángulo con los de otros equipos.
   a. ¿Son todos congruentes?
   b. ¿Cuántos triángulos distintos se pueden construir conociendo únicamente los ángulos interiores?

Discutan sus resultados con el profesor y, a partir de los resultados obtenidos, enuncien una regla que permita determinar si dos triángulos son congruentes.

PARA SABER MÁS

Dos triángulos son congruentes si cada uno de los lados de un triángulo mide respectivamente lo mismo que el lado correspondiente en el otro triángulo; a este criterio se le conoce como "lado-lado-lado" (LLL).

Dos triángulos son congruentes si dos ángulos y el lado común a esos dos ángulos miden respectivamente lo mismo que los elementos correspondientes del otro triángulo; a este criterio se le conoce como "ángulo-lado-ángulo" (ALA).

REFLEXIONA

Lee con atención las afirmaciones siguientes.

- Dos triángulos rectángulos son congruentes si sus ángulos agudos respectivos son congruentes.
- Dos triángulos son congruentes si sus lados homólogos miden lo mismo.
- Dos triángulos son congruentes si sus ángulos respectivos son iguales.
- Para demostrar que dos triángulos son congruentes se puede utilizar el criterio AAL.
- Todos los triángulos equiláteros son congruentes.

Escribe en tu cuaderno si consideras que son falsas o verdaderas y argumenta tu respuesta.

Tarea en casa

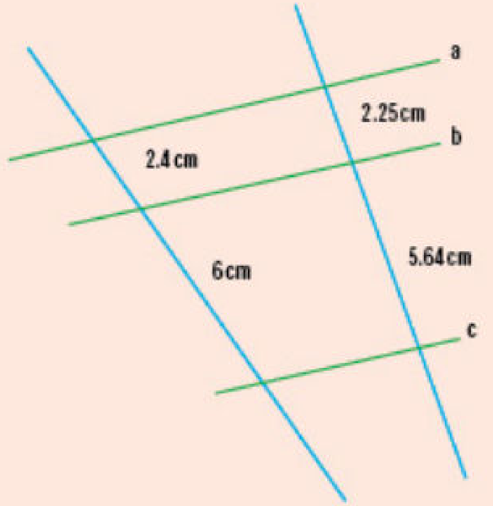
A continuación se muestran ejemplos de triángulos semejantes.

1. Observa con atención los ejemplos anteriores y contesta las preguntas.
   a. ¿Qué son los triángulos semejantes?
   b. ¿Qué tienen en común los triángulos semejantes?
   c. ¿Qué condiciones cumplen los triángulos semejantes?
   d. ¿Cuál es la razón (cociente) de proporcionalidad en los ejemplos?
   e. ¿Qué características tienen los ángulos correspondientes?

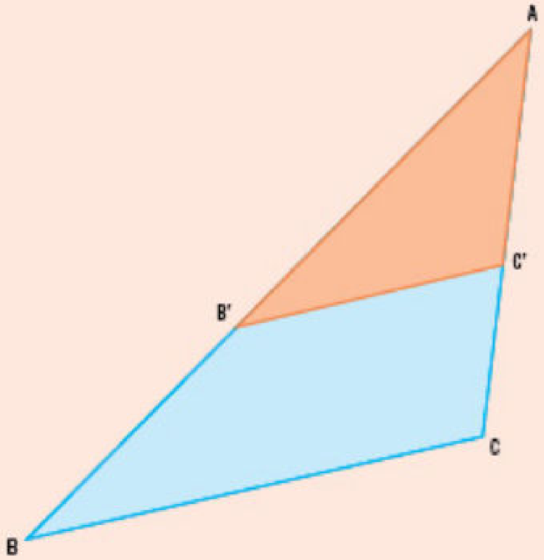
PARA TERMINAR

Con la orientación de tu profesor, reúnete con un compañero y resuelvan los problemas.

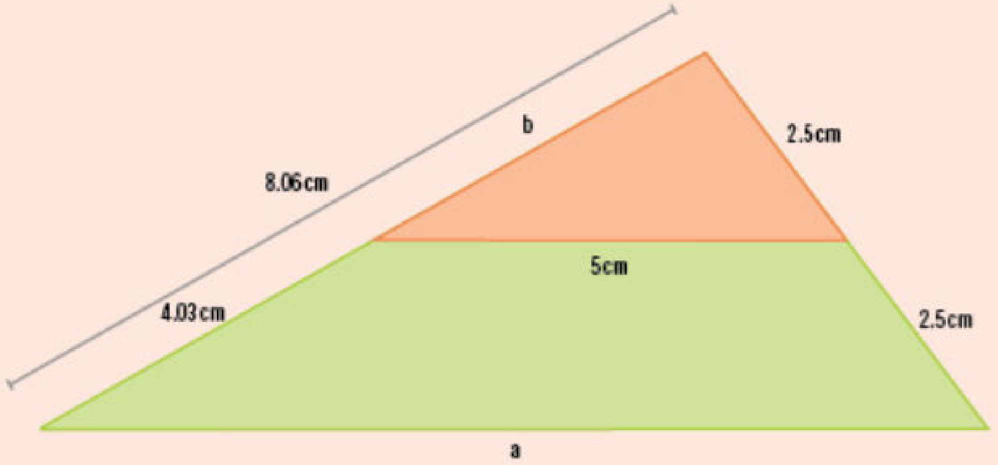
1. Las rectas a y b son paralelas. ¿Podemos afirmar que c es paralela a las rectas a y b?, ¿por qué?



2. Dado un triángulo ABC, como se muestra en la figura siguiente, si se traza un segmento paralelo B'C' a uno de los lados del triángulo, se obtiene otro triángulo AB'C', cuyos lados son proporcionales a los del triángulo ABC.



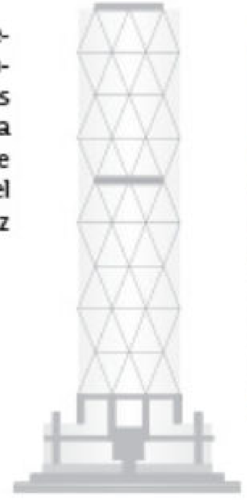
3. Escribe la razón de proporcionalidad entre el triángulo ABC y el triángulo AB'C'.
4. Determina las medidas de los segmentos a y b para los valores que se muestran en el triángulo. Toma en cuenta que la línea que divide la región naranja de la verde es paralela al lado a.



LECCIÓN 3

EXPLICITACIÓN DE LOS CRITERIOS DE CONGRUENCIA Y SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS A PARTIR DE CONSTRUCCIONES CON INFORMACIÓN DETERMINADA

El triángulo es una figura geométrica con numerosas aplicaciones en la arquitectura; por ejemplo, se ha utilizado para construir las estructuras de grandes edificios, como la Torre Hearst en Nueva York. Su diseño, a partir de triángulos, ahorró 20 % de acero en su construcción y, además, disminuye el consumo de energía eléctrica al permitir que la luz natural ilumine su interior la mayor parte del día.



Torre Hearst. Las formas triangulares de esta torre se conocen también como estructura diagonal.

PARA COMENZAR

Con la guía de tu profesor, reúnete con un compañero para efectuar los trazos siguientes.

1. Tracen un triángulo cualquiera en su cuaderno. Consideren las condiciones o criterios para la construcción de triángulos.
2. Ahora tracen dos triángulos congruentes.
   a. ¿Cómo pueden determinar si los dos triángulos son congruentes o iguales al original?
   b. ¿Qué se debe hacer para trazar un triángulo con la misma forma que otro, pero que sea de mayor o menor tamaño?, ¿qué instrumentos se emplean?
   c. ¿En qué situación puede ser necesario el trazo de un triángulo congruente o igual a un modelo dado?

Argumenten sus respuestas, recurran a las definiciones de "congruencia" y "semejanza".

REFLEXIONA

¿Recuerdas qué es un pantógrafo? ¿Qué principios geométricos están involucrados en su funcionamiento? Discute con tu profesor y compañeros cómo funciona este instrumento.

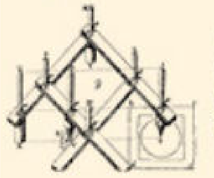
Triángulos congruentes

Lee el planteamiento y desarrolla lo que se indica.

Pedro, un estudiante de arquitectura, está construyendo la maqueta de su proyecto final de curso, pero no cree poder terminar a tiempo a menos que reciba un poco de ayuda. Su hermana Érika se propone ayudarlo, trazando y recortando piezas triangulares de cartón a partir de las medidas que Pedro le proporcione.

MATEMÁTICAS HISTÓRICAS

Christoph Scheiner (1573-1650) fue un físico y matemático nacido en la región de Swabia, al suroeste de Alemania. Uno de sus grandes talentos fue la creación de instrumentos como el pantógrafo. Este instrumento tiene cuatro barras articuladas, paralelas dos a dos. Con este peculiar invento se pueden realizar copias de dibujos, así como ampliaciones o reducciones.



La palabra "pantógrafo" proviene del griego "*pantós*", todo, y "*graphein*", de escribir, esto es "describir todo".

Fuente: *Christoph Scheiner: el pantógrafo*, de Rita Haub.

Triángulo I

- Longitud del primer lado $L_1 = 5\,\text{cm}$
- Longitud del segundo lado $L_2 = 4.4\,\text{cm}$
- Longitud del tercer lado $L_3 = 3.3\,\text{cm}$

Triángulo II

- Longitud del primer lado $L_1 = 5\,\text{cm}$
- Longitud del segundo lado $L_2 = 4.4\,\text{cm}$
- Ángulo entre los dos lados $\angle B = 40°$

Triángulo III

- Longitud de un lado $L_1 = 3\,\text{cm}$
- Ángulo adyacente a $\angle A = 60°$
- Ángulo adyacente a $\angle B = 40°$

1. Antes de reunirte con tus compañeros, traza los triángulos que Érika elaborará, usa la información proporcionada por Pedro.

2. Con la guía de tu profesor, reúnete con dos compañeros y comparen uno a uno los triángulos que trazaron; posteriormente respondan las preguntas.
   a. ¿Qué información proporcionó Pedro para construir cada uno de los triángulos que resultaron congruentes?
   b. ¿Los triángulos que construyeron tienen todos la misma forma y medida?

3. Identifiquen aquellos que son iguales o congruentes. Midan los lados con su regla y los ángulos con su transportador para verificarlo.
4. Resuman los resultados, completando la tabla.

Información proporcionada para construir triángulos congruentes	
Triángulo I	
Triángulo II	
Triángulo III	

5. Con la guía de tu profesor, discute con tus compañeros y concluyan la actividad respondiendo la pregunta: ¿cuáles son las medidas que deben proporcionarse para construir dos triángulos que tengan la misma forma y tamaño, es decir, para que sean congruentes entre sí?

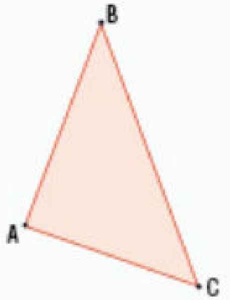
LECTURALIA

¿Cómo resolver problemas de la vida diaria mediante las matemáticas?, ¿cómo usar esquemas o gráficas para comprender situaciones cotidianas? En el libro *Apuntes de matemáticas*, que encontrarás en tu Biblioteca Escolar, puedes conocer cómo las matemáticas pueden solucionar todo tipo de problemas.

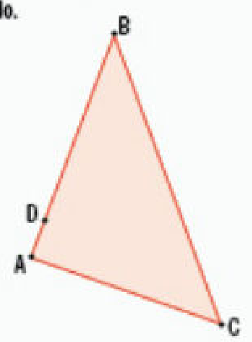
TIC

Realiza la actividad utilizando el *software* de geometría dinámica GeoGebra.

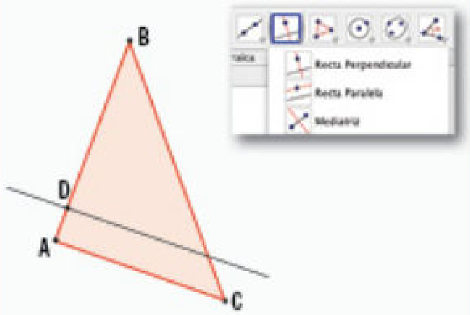
1. Traza un triángulo usando la herramienta **Polígono**.
   Haz clic en la pantalla gráfica en dos puntos distintos y cierra la figura para formar el triángulo.



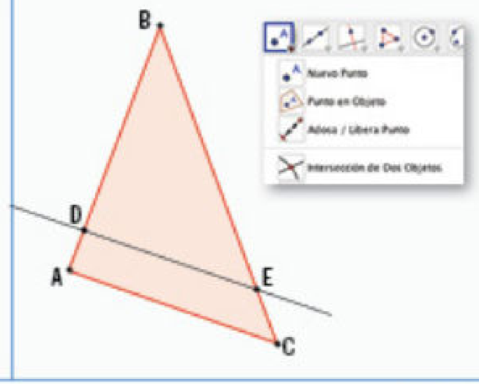
2. Usando la herramienta **Nuevo Punto**, traza un punto sobre cualquiera de los lados que forman al triángulo.
   Presiona el icono y haz clic sobre un lado del triángulo.



3. Usando la herramienta **Recta Paralela**. Traza una línea paralela que pase por el punto D.
   Haz clic en el icono, seguido de esto haz clic sobre el punto D.

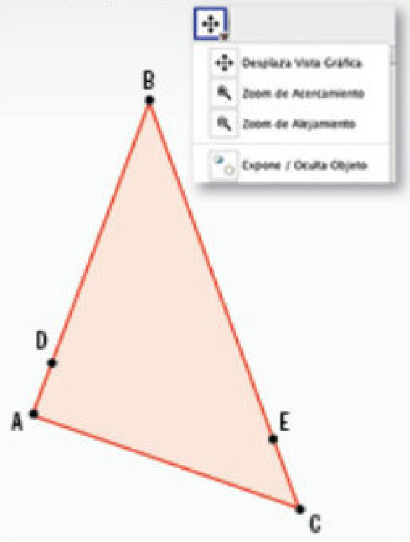


4. Marca la intersección entre el lado del triángulo con la recta usando la herramienta **Intersección de Dos Objetos**.

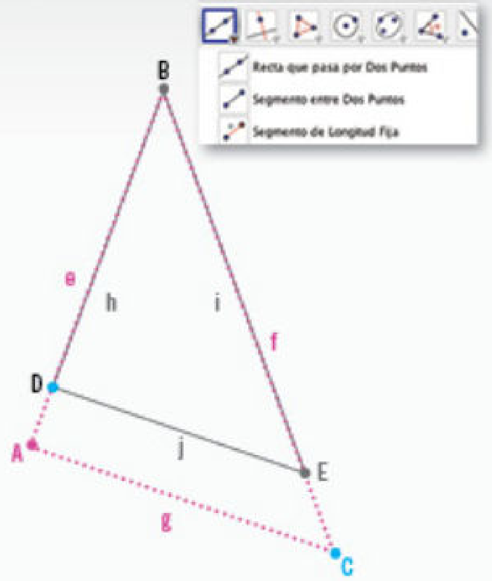


Continúa...

5. Selecciona la herramienta **Expone / Oculta Objeto** y da clic sobre todos los lados del triángulo y sobre la recta paralela.



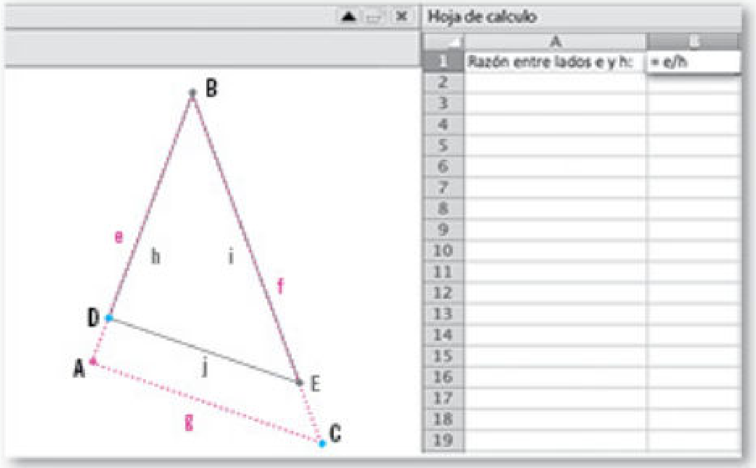
6. Selecciona la herramienta **Segmento entre Dos Puntos** y traza los triángulos formados por $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, así como $\overline{DB}$, $\overline{BE}$ y $\overline{DE}$, respectivamente.



7. ¿Cómo son los triángulos ABC y DBE?, ¿cómo son los lados de los triángulos? Haz clic en el menú **Vista** y selecciona la opción **Hoja de Cálculo**.

En la celda B1 escribe la razón entre los lados compartidos de cada triángulo, en nuestro ejemplo, =e/h. Continúa de la misma manera para calcular las razones entre los lados $\frac{f}{i}$ y $\frac{g}{j}$.

a. ¿Cómo resultaron ser las razones entre sí?
b. ¿Cómo son los lados de los triángulos?
c. ¿A qué conclusión podrías llegar? ¿Cómo son esos dos triángulos?
d. Intenta mover el punto D. ¿Qué sucede con la razón entre los lados?
e. ¿Cómo son ahora los triángulos?
f. Intenta cambiar la forma del triángulo ABC. ¿Cómo resultaron ser los triángulos?
g. ¿A qué conclusión podrías llegar? ¿Cómo son los triángulos que se forman al trazar una recta paralela a uno de los lados del triángulo?



Triángulos semejantes

Érika sigue en su labor de ayudar a construir y recortar las piezas de la maqueta de Pedro. Apóyenla trazando los triángulos en su cuaderno de acuerdo con la información proporcionada.

Triángulo IV
- Longitud del primer lado $L_1 = 7$ cm
- Longitud del segundo lado $L_2 = 4$ cm
- Longitud del tercer lado $L_3 = 6$ cm

Triángulo V
- Longitud del primer lado $L_1 = 3.5$ cm
- Longitud del segundo lado $L_2 = 2$ cm
- Longitud del tercer lado $L_3 = 3$ cm

Triángulo VI
- Primer ángulo $\angle B = 58.8°$
- Segundo ángulo $\angle C = 86.4°$

Triángulo VII
- Longitud del primer lado $L_1 = 14$ cm
- Longitud del segundo lado $L_2 = 8$ cm
- El ángulo entre L_1 y L_2 es $\angle B = 58.8°$

PARA SABER MÁS

Para verificar que dos triángulos tienen la misma forma y medida, es decir, que sean congruentes entre sí, se debe cumplir cualquiera de los criterios siguientes.
- Los dos triángulos deben tener respectivamente uno a uno sus tres lados iguales o congruentes.
- Los dos triángulos deben tener un ángulo y los dos lados que lo forman iguales o congruentes.
- Los dos triángulos deben tener dos ángulos iguales y el lado entre ellos de igual medida o congruente.

Para verificar que dos triángulos tienen la misma forma, es decir, que sean semejantes entre sí, se deben cumplir cualquiera de los criterios siguientes.
- Dos triángulos son semejantes si sus lados son proporcionales.
- Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual o congruente y los lados que lo forman son proporcionales.
- Dos triángulos son semejantes si dos de sus ángulos son iguales o congruentes.

1. Reúnanse con dos compañeros y comparen uno a uno los triángulos, posteriormente respondan las preguntas.
   a. ¿Cómo son los triángulos que construyeron?, ¿tienen todos las mismas medidas?, ¿tienen todos la misma forma?
   b. Identifiquen aquellos triángulos que tienen la misma forma. ¿Los lados de estos triángulos comparten alguna característica en común?

2. A partir de sus respuestas y la información obtenida completen la tabla.

Lados	Triángulo IV	Triángulo V	Razón entre los lados $\frac{L}{L}$
Lado 1			
Lado 2			
Lado 3			

Lados	Triángulo IV	Triángulo VI	Razón entre los lados $\frac{L}{L}$
Lado 1			
Lado 2			
Lado 3			

Lados	Triángulo IV	Triángulo VII	Razón entre los lados $\frac{L}{L}$
Lado 1			
Lado 2			
Lado 3			

Lados	Triángulo V	Triángulo VI	Razón entre los lados $\frac{L}{L}$
Lado 1			
Lado 2			
Lado 3			

Lados	Triángulo V	Triángulo VII	Razón entre los lados $\frac{L}{L}$
Lado 1			
Lado 2			
Lado 3			

Lados	Triángulo VI	Triángulo VII	Razón entre los lados $\frac{L}{L}$
Lado 1			
Lado 2			
Lado 3			

a. ¿Cómo resultaron ser las razones entre los lados de los triángulos?

Con la guía de su profesor, discutan con sus compañeros y concluyan: ¿cuáles son las medidas que deben proporcionarse para construir dos triángulos que sean semejantes entre sí, es decir, que tengan la misma forma?

Reto

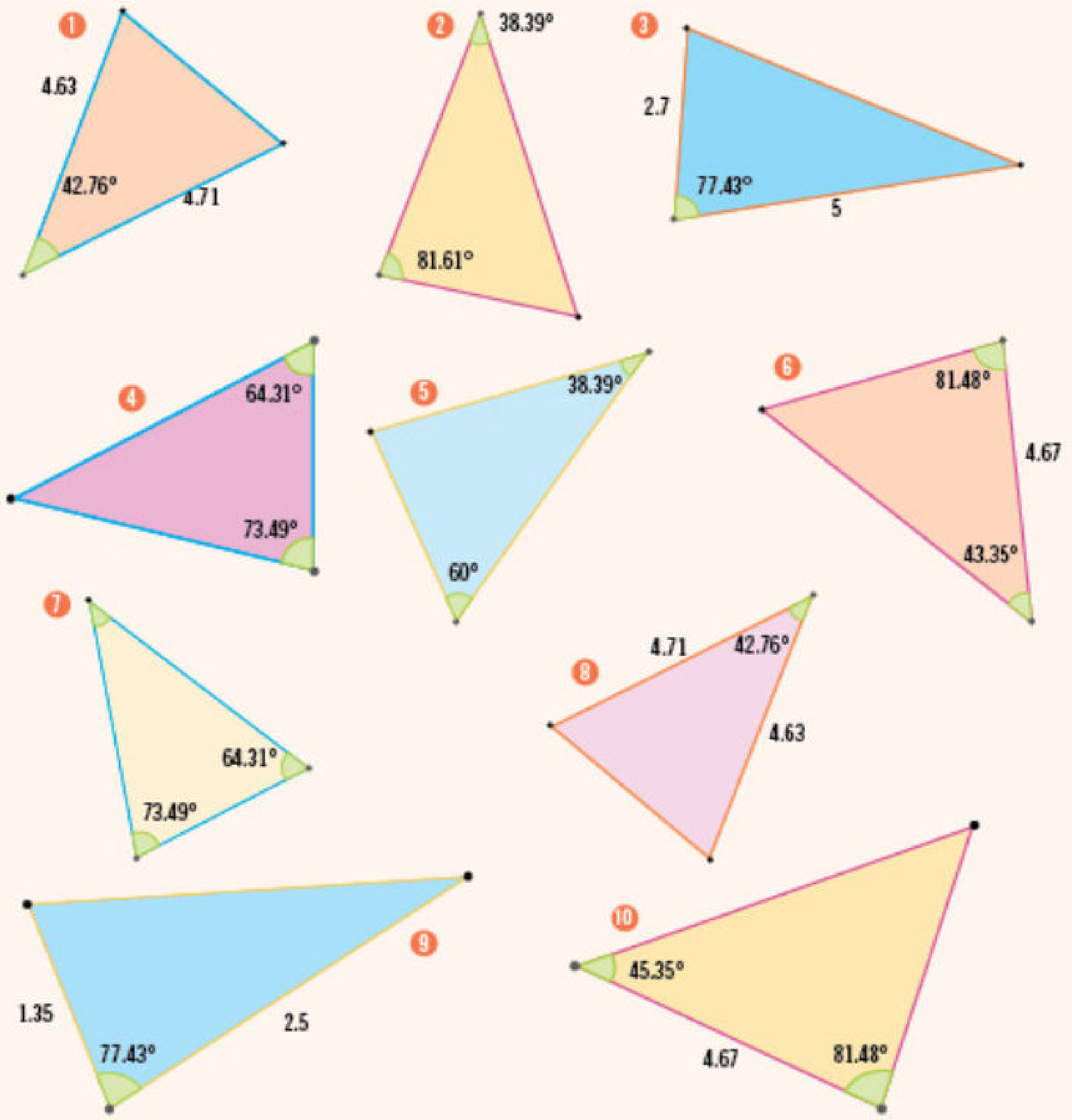
Con base en los criterios de semejanza y congruencia, respon-de las preguntas.

1. ¿Cómo son todos los triángulos rectángulos?, ¿por qué?
2. ¿Cómo son todos los triángulos isósceles?, ¿por qué?

PARA RESOLVER

En las actividades anteriores identificaste las condiciones necesarias para construir triángulos congruentes o en su caso triángulos semejantes.

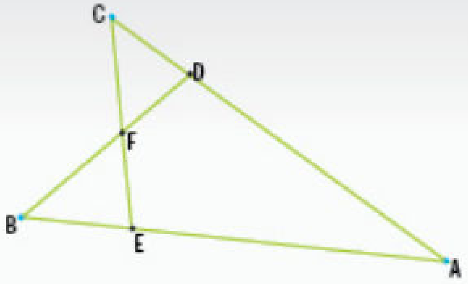
1. Con base en esos criterios, relaciona los triángulos. Escribe en tu cuaderno si son congruentes o son semejantes y argumenta por qué.



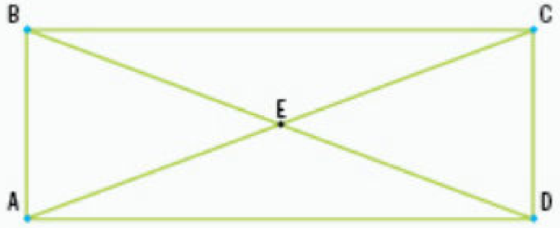
Con la ayuda de tu profesor, verifica si tus compañeros obtuvieron los mismos resultados y comparen los argumentos que usaron para decidir si los triángulos son congruentes o semejantes.

Tarea en casa

1. Analiza la figura y contesta en tu cuaderno los planteamientos que se formulan.
   a. Dados los ángulos C=47.28°, D=78.38°, B=47.28°, E=78.38° y los lados $\overline{CD}$=2.64 y $\overline{BE}$=12.64, ¿cómo son los triángulos CDF y BEF?
   b. Dados los ángulos C=47.28° y B=47.28°, y los lados $\overline{CE}$=5, $\overline{BD}$=5, $\overline{AC}$=15 y $\overline{AB}$=15, ¿cómo son los triángulos ACE y ABD?



2. Analiza la figura y contesta los planteamientos que se formulan.
   a. Si $\overline{BA}$=4.87, $\overline{BD}$=10.97, $\overline{DC}$=4.87 y $\overline{AC}$=10.97, y los ángulos B=90° y C=90°, ¿cómo son los triángulos ABD y ACD? Explica por qué.

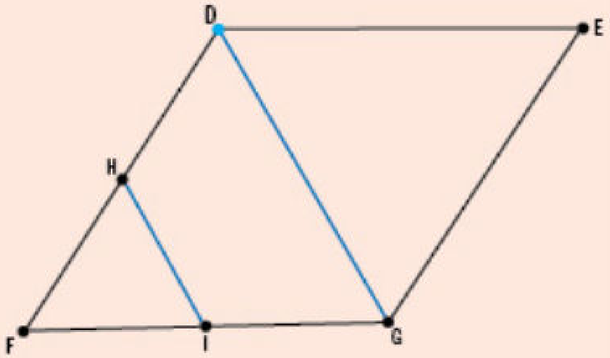


   b. Los triángulos ABE y CDE tienen los ángulos A=D=42°, B=C=90° y E=47.9°, ¿qué puedes decir de ellos?, ¿por qué?

PARA TERMINAR

Los segmentos que forman la figura tienen las medidas $\overline{FH}$ = 2, $\overline{FI}$ = 2, $\overline{DE}$ = 4, $\overline{GE}$ = 4, ∠F = 57.3° y ∠E = 57.3°. Responde en tu cuaderno lo siguiente.

1. ¿Cómo son los triángulos FHI y DEG? Argumenta tu respuesta.
2. En la misma figura, los ángulos F, H, y D miden ∠F = 57.3°, ∠H = 61.4° y ∠D = 61.4°, respectivamente, ¿cómo son los triángulos FDG y FHI? Explica por qué.
3. Si $\overline{FD}$ = 4, $\overline{FG}$ = 4, $\overline{DE}$ = 4 y $\overline{GE}$ = 4, ¿cómo son los triángulos FGD y DGE?, ¿por qué?



Con la ayuda de tu profesor, comparte tus respuestas con tus compañeros. Explica los criterios de semejanza y congruencia, y menciona de qué manera son útiles en alguna aplicación de la vida cotidiana.

LECCIÓN 4

ANÁLISIS DE REPRESENTACIONES (GRÁFICAS, TABULARES Y ALGEBRAICAS) QUE CORRESPONDEN A UNA MISMA SITUACIÓN. IDENTIFICACIÓN DE LAS QUE CORRESPONDEN A UNA RELACIÓN DE PROPORCIONALIDAD

Con frecuencia encontramos tablas y gráficas con datos que nos proporcionan información relevante. Algunos ejemplos son la concentración de salinidad en el agua; la relación entre la distancia recorrida por una motocicleta y el tiempo empleado; la ganancia obtenida en el reciclaje de botellas de plástico; la relación que existe entre el número de personas y la aportación económica para realizar alguna actividad específica, entre otros.

- ¿Sabes interpretar una gráfica?
- ¿Qué es una proporción?
- ¿Puedes encontrar la proporción entre las variables mostradas en una tabla?
- ¿Cuántos tipos de proporción existen?

Los tiempos estimados para el recorrido de un autobús se definen en función de las distancias.

PARA COMENZAR

Realiza lo que se te pide.

En la tabla siguiente se muestra la concentración de sal en cantidades específicas de agua de mar.

Agua de mar (l)	30	50	70	90		150	200
Concentración de sal (g)	1050	1750		3150	3850	5250	

1. Completa la tabla y contesta la pregunta.
   a. ¿Cuántos gramos de sal se encuentran en 1 l de agua de mar?
2. Construye una gráfica que relacione los litros de agua y la concentración de sal.
   a. ¿Cuántos gramos de sal se obtienen de 25 l?
   b. ¿Cuántos gramos de sal se obtienen de 200 l?

PARA SABER MÁS

La constante de proporcionalidad es el cociente de una razón, y una razón es una comparación por cociente entre dos cantidades. Si tenemos una cantidad *a* y una cantidad *b*, la razón sería $\frac{a}{b} = k$, donde el cociente *k* es la constante de proporcionalidad.

Continúa...

3. Con ayuda de tu profesor, de manera grupal, contesten las preguntas.
   a. ¿Qué tipo de proporcionalidad se tiene en este caso? Expliquen su respuesta.
   b. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

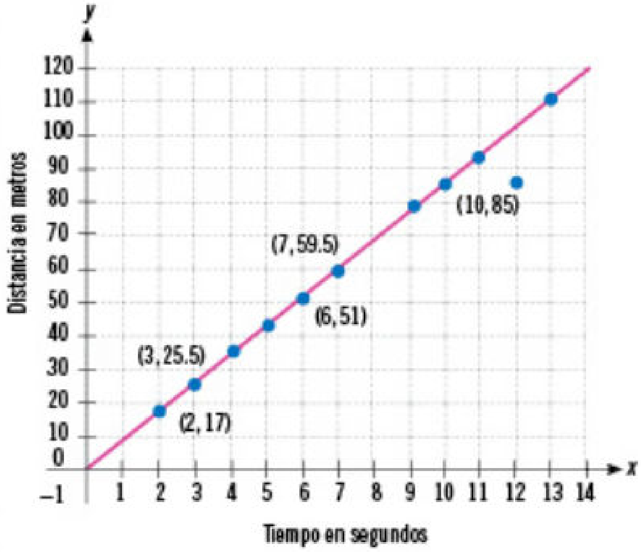
Con la guía de tu profesor, compara tus respuestas con el resto de tus compañeros. Si encuentran diferencias, determinen a qué se deben y, de ser necesario, corríjanlas.


Las plantas desalinizadoras no producen emisiones atmosféricas.

Variación directamente proporcional

Reúnete con alguno de tus compañeros y resuelvan el problema.

En la gráfica se muestra la relación entre la distancia recorrida y el tiempo empleado por una motocicleta de carreras que viaja con una rapidez constante. Respondan las preguntas a partir de la información que proporciona la gráfica.



1. Completa la tabla que relaciona el tiempo y la distancia recorrida por la motocicleta. Después responde lo que se indica en tu cuaderno.

Tiempo en segundos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Distancia en metros		17				51	59.5		76.5		

   a. ¿Cuántos metros recorre la motocicleta en 1 segundo?
   b. ¿Cuántos metros recorre la motocicleta en 14 segundos?
   c. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?
   d. De acuerdo con el contexto del problema, ¿qué significa el punto de coordenadas (7, 59.5)?

2. Posteriormente, de manera grupal, contesten las preguntas siguientes.
   a. ¿Cuál es la expresión algebraica que corresponde a la gráfica (la relación entre la distancia y el tiempo)?
   b. ¿Qué tipo de proporcionalidad existe en este caso?
   c. ¿Cuál es la distancia que recorre la motocicleta en media hora?

Con la guía de tu profesor, comparen sus respuestas con el resto del grupo. Si hay diferencias, analicen a qué se deben. ¿Están relacionadas con la interpretación de la gráfica o con las operaciones efectuadas?

Reto

Atendiendo a los datos del problema de la motocicleta, contesta las preguntas.

1. ¿Cuál es la distancia que recorrió la motocicleta a los 5 min?
2. ¿Cuánto tiempo empleó en recorrer 30 km?
3. ¿Cuál es la rapidez constante a la que se desplaza?

Proporcionalidad directa

1. Analiza la situación.

Con la finalidad de hacer conciencia sobre la importancia de reciclar para cuidar el ambiente, un grupo de tercer año de secundaria se ha propuesto juntar las botellas de plástico PET (polietileno tereftalato), para venderlo por kilogramo e invertir el dinero en la remodelación y conservación de las jardineras de la escuela. En la tabla siguiente se registraron los kilogramos vendidos y el dinero recibido por la venta del PET durante cuatro semanas.

PET (kg)	3	5	8	2
Cantidad obtenida ($)	6	10	16	4

2. Analiza la información que aporta la tabla y responde las preguntas en tu cuaderno.
   a. ¿Cuál es el precio por kilogramo de PET?
   b. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?
   c. Si el grupo junta 12 kg, ¿cuánto dinero recibirá?
   d. ¿Cuántos kilogramos de PET juntaron si al venderlo les pagaron $7?

3. En un plano cartesiano construye la gráfica que corresponda a los puntos de la tabla de registro de las cuatro semanas.
   a. ¿Qué significa en este caso la coordenada (0,0)?

4. De manera grupal, contesten las preguntas.
   a. Si logran reunir x kg de PET, ¿cuánto dinero obtendrían?
   b. ¿Cuántos kilogramos de PET necesitan para obtener $50?

Con ayuda de tu profesor, comparen con el resto de los equipos los resultados obtenidos. Analicen los diferentes resultados y concluyan cuál o cuáles son correctos, argumenten sus respuestas.

PARA SABER MÁS

En la Antigüedad se creía que una serie numérica podía crear belleza, armonía y perfección por la proporción privilegiada que existe dentro de los elementos naturales.

Se piensa que los griegos estaban sujetos a una proporción numérica específica que era fundamental para sus ideales de belleza.

La proporción numérica es conocida como "razón áurea divina proporción" y se expresa de la manera siguiente.

$$\frac{A}{B} = \frac{A+B}{A}, \text{ donde}$$

A = segmento mayor, B = segmento menor.

El segmento AB se divide en dos segmentos, uno mayor que el otro, de tal manera que el cociente entre el mayor y el menor sea igual al cociente entre la suma de los dos segmentos y el mayor.

En la escultura y arquitectura de la antigua Grecia se encuentra presente la razón áurea, por ejemplo, en las Cariátides, ubicadas en la Acrópolis de Atenas.

De esta manera, la razón es

$$\varnothing = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ 1.618033989...$$

TIC

En el sitio electrónico siguiente se puede encontrar la historia sobre la divina proporción: http://www.sectormatematica.cl/arte/divina_proporcion.pdf (consultado el 17 de marzo de 2016).

Aplicación de relaciones de proporcionalidad

Con ayuda de tu profesor, reúnete con otros compañeros y resuelvan el problema en su cuaderno.

Un grupo de tercer año de secundaria quiere juntar $1 500 para realizar un convivio. La cantidad aportada por cada alumno dependerá del número de alumnos que se integren a esta actividad. En la tabla siguiente se muestra la relación del número de alumnos y la aportación individual.

Número de alumnos	1	2	3	4	5	10	20	30	50
Aportación individual	1 500	750	500	375	300	150	75	50	30

1. Responde las preguntas.
   a. Si el total de alumnos es 25, ¿cuánto debe aportar cada alumno?
   b. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?
   c. Si se simboliza con la letra "n" al número de alumnos y con la letra "d" la aportación individual, ¿cuál es la expresión algebraica que relaciona ambas variables?
   d. ¿Cuántos alumnos se necesitan para que la aportación sea de $ 125?
2. Con los datos de la tabla, construyan la gráfica que relaciona el número de alumnos y la aportación individual.
3. Con ayuda de su profesor, comparen sus respuestas con el resto de los equipos, analicen las coincidencias y diferencias, de manera que obtengan la respuesta correcta a cada una de las preguntas. Juntos contesten las preguntas.
   a. ¿Qué pasa con los valores de la aportación individual cuando el número de alumnos crece?
   b. ¿Qué tipo de proporcionalidad se presenta en este caso?

REFLEXIONA

En esta lección has analizado las proporcionalidades directa e inversa. ¿Cómo puedes identificar si un problema se puede resolver usando proporcionalidad inversa o directa? Explica tu respuesta.

PARA RESOLVER

Resuelve en tu cuaderno cada una de las situaciones de variación proporcional e identifica si son directas o inversas. Argumenta tus respuestas.

1. En la taquería de la esquina tienen la tabla de la derecha para calcular el precio de los tacos. ¿Cuál es el precio de un solo taco?

Tacos	Precio ($)
4	16
6	24
9	36

2. La fórmula para calcular 10 % de descuento en una tienda está dada por la expresión $y = 0.10x$. Si un par de zapatos cuestan $560, ¿cuánto se debe pagar si tienen 30 % de descuento?
3. Sabiendo que las magnitudes A y B son inversamente proporcionales y que la constante de proporcionalidad inversa es 48, completa la tabla.

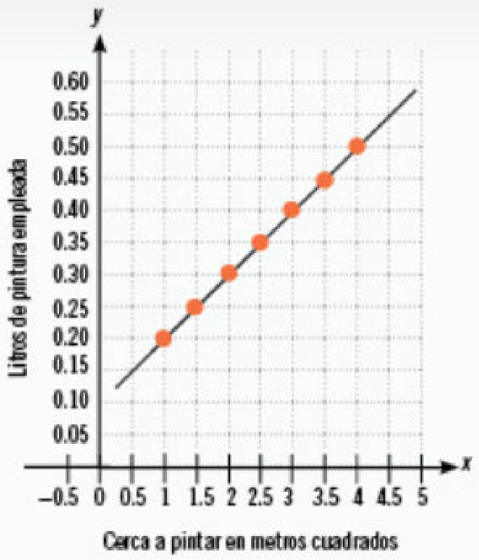
A	2			24
B	24			2

4. Para elaborar una tarta de queso para 4 personas se necesitan 300 g de queso, 20 ml de leche, 100 g de azúcar, 100 g de mantequilla y 50 g de harina. Si se desea hacer una tarta para 6 personas, ¿qué cantidad de cada ingrediente necesitaremos?
5. Para llenar de agua una alberca en 15 h se necesitan 2 llaves de agua abiertas, ¿cuántas llaves serán necesarias para llenarla en 5 h?

Tarea en casa

En la gráfica siguiente se relaciona la superficie de una cerca que se va a pintar con la pintura necesaria para ello.

1. Analiza la gráfica y contesta las preguntas en tu cuaderno.
   a. ¿Cuánta pintura se necesita para cubrir $1.5\,m^2$ de cerca?
   b. ¿Cuántos metros cuadrados se pueden pintar con $\frac{1}{4}$ l de pintura?
   c. ¿Qué significa en este caso el punto $(2, \frac{1}{4})$?
   d. Si se asigna a la variable x los metros cuadrados de cerca que se deben pintar y a la variable y los litros de pintura, ¿cuál es la expresión algebraica que relaciona ambas variables?
   e. ¿Cuánta pintura se necesita para cubrir $12\,m^2$ de cerca?



Con ayuda de tu profesor, compara tus resultados con el resto de tus compañeros. En caso de haber diferencias, de manera grupal obtengan una sola expresión algebraica y comprueben su veracidad.

PARA TERMINAR

Analiza el problema.

Un grupo de jóvenes organiza una excursión. El autobús hace 4 horas para llegar a su destino si va a 110 km/h.

1. Contesta las preguntas en tu cuaderno.
   a. ¿A qué distancia se encuentra el lugar donde quieren ir de paseo?
   b. ¿A qué rapidez promedio debe ir el autobús para llegar en 6 horas?
   c. Si el autobús fuera a 120 km/h, ¿cuánto tiempo tardaría en llegar a su destino?
2. Escribe una expresión algebraica que relacione el tiempo, la rapidez y la distancia.
   a. ¿Qué tipo de proporcionalidad existe en el problema?
3. Elabora una tabla con diferentes valores de rapidez y el número de horas para cada uno de éstos.
4. Construye una gráfica para los datos de la tabla anterior.
5. Con la guía de tu profesor, comparte tus respuestas con el resto de tus compañeros y de manera grupal deduzcan los conceptos siguientes.
   a. ¿Qué es proporcionalidad?
   b. ¿Qué es proporcionalidad directa?
   c. ¿Qué es proporcionalidad inversa?

LECCIÓN 5

REPRESENTACIÓN TABULAR Y ALGEBRAICA DE RELACIONES DE VARIACIÓN CUADRÁTICA, IDENTIFICADAS EN DIFERENTES SITUACIONES Y FENÓMENOS DE LA FÍSICA, LA BIOLOGÍA, LA ECONOMÍA Y OTRAS DISCIPLINAS

Al estudiar algunos fenómenos de la naturaleza o algunas situaciones de la vida cotidiana se pueden observar relaciones de variación cuadrática; por ejemplo, la relación que hay entre el tiempo que transcurre y la distancia que recorre una pelota al dejarla en caída libre; la relación entre la distancia de un proyector y el área de la imagen proyectada en la pantalla; la relación entre el tiempo y la distancia que alcanza un objeto que asciende en la tierra, o bien, al estudiar los efectos nutricionales en los organismos o los ingresos de una empresa. Dichos fenómenos o situaciones se asocian a diferentes ciencias, como las matemáticas, la física, la biología y la economía, entre otras.

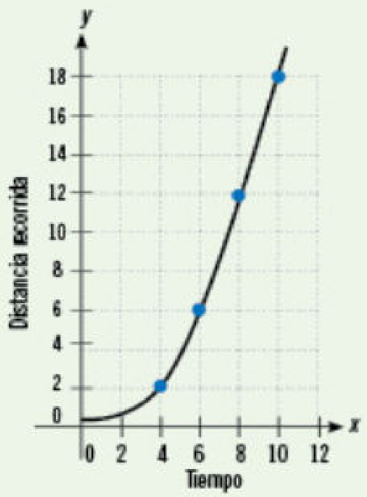
PARA COMENZAR

Lee el planteamiento y resuelve lo que se solicita.

Para estudiar la relación entre el tiempo y la distancia que recorre una pelota al dejarla en caída libre, se ha registrado la información siguiente.

Tiempo (s)	1	2	3	4
Distancia recorrida (m)	1	4	9	16

1. Responde en tu cuaderno.
   a. ¿Cuál será la distancia recorrida al cabo de 5 segundos?
   b. ¿Cómo se obtiene la distancia recorrida a partir del tiempo?
   c. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la relación entre el tiempo y la distancia recorrida?
   d. ¿Cómo se obtiene el tiempo a partir de la distancia recorrida?
   e. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el procedimiento para obtener el tiempo a partir de la distancia?



La variación que experimenta un cuerpo en caída libre no es de carácter lineal.

Expresión tabular de relaciones de variación cuadrática


El tamaño de la pantalla en cualquier cine obliga a colocar el proyector a una distancia determinada.

En el cine, todas las escenas de las películas se visualizan dentro del área de la pantalla. Esto se debe a la relación que existe entre la distancia que hay entre el proyector y la pantalla, que define el área de la imagen que se proyecta.

1. Completa la tabla siguiente y responde en tu cuaderno lo que se pide.
   a. ¿Cómo se obtiene el área de la imagen proyectada a partir de la distancia entre el proyector y la pantalla?

Distancia entre el proyector y la pantalla (m)	1	1.5		2.5		3.5
Área de la imagen proyectada (m²)	4	9				

   b. ¿Cuántos metros cuadrados medirá el área de la imagen proyectada si la distancia entre el proyector y la pantalla es de 5 m?
   c. ¿Cuál es la expresión algebraica que nos permite obtener el área de la imagen proyectada a partir de cualquier distancia?
   d. Si en una sala de cine se quiere proyectar una película en una pantalla de 260 m², ¿a qué distancia se debe poner el proyector?
   e. Considerando que las pantallas de las salas de cine generalmente miden 4.6 m por 8.6 m y 9 m por 19.7 m, ¿a qué distancia deben poner el proyector en cada caso?
   f. Si las pantallas Imax miden 20 m por 28 m y 16 m por 28 m, ¿a qué distancia deben poner un proyector para este tipo de pantallas?
   g. ¿Cómo se obtiene la distancia entre el proyector y la pantalla a partir del área de la imagen proyectada?
   h. ¿Cuál es la expresión algebraica que nos permite obtener la distancia a partir del área de imagen o de pantalla?

PARA SABER MÁS

Una relación de variación cuadrática hace referencia a las funciones de segundo grado o funciones cuadráticas que son de la forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Con ayuda de tu profesor, compara tus resultados con los de tus compañeros. En caso de encontrar diferencias significativas, analicen a qué se debieron y corrijan lo que sea necesario.

Expresión algebraica de relaciones de variación cuadrática

Luis estudia la caída libre de los cuerpos, para ello deja caer una piedra desde una altura de 320 m y registra la distancia entre el piso y la piedra mientras transcurre el tiempo:

Tiempo (s)	0	1	2	3	4
Distancia (m)	320	315	300	275	240

REFLEXIONA

¿Cómo se puede obtener el tiempo transcurrido a partir de la distancia?

1. Contesta en tu cuaderno lo que se indica.
   a. ¿Cómo se puede obtener la distancia a partir del tiempo?
   b. ¿Cuál será la distancia entre el piso y la piedra al cabo de 5 segundos?
   c. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que la piedra golpee el piso?
   d. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la relación entre el tiempo y la distancia?

Con ayuda de tu profesor, verifica los resultados con tus compañeros. En caso de encontrar diferencias, analicen a qué se debieron y corrijan lo que sea necesario.

MATEMÁTICAS HISTÓRICAS

Uno de los científicos más importantes por sus descubrimientos en física, óptica y matemáticas fue Galileo Galilei (1564-1642). En lo referente a sus descubrimientos sobre el movimiento de los cuerpos en caída libre, de su ley: "Todo cuerpo persevera en su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo a no ser que sea obligado a cambiar su estado por fuerzas impresas sobre él", se derivan reglas como la de la altura a de un cuerpo sujeto a la acción de la gravedad: $a = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$.

En esta ley subyace la acepción de la variación cuadrática, ya que establece leyes entre magnitudes que sin duda son relaciones funcionales. Por tanto, su obra contribuyó a establecer el concepto de función a lo largo de la historia.

Fuente: *Galileo Galilei*, de Favio Gabriel Vintancurt.

PARA RESOLVER

Lee el planteamiento y resuelve.

La aceleración promedio del velocista jamaiquino Usain Bolt en su última carrera fue de 3.072 m/s². En la tabla se registró el tiempo y la distancia que recorrió.

Tiempo (s)	1	1.5	2	2.5
Distancia (m)	1.536	3.456	6.144	9.6

1. Responde las preguntas siguientes en tu cuaderno.
   a. ¿Cómo se puede obtener la distancia a partir del tiempo considerando la aceleración?
   b. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la relación entre el tiempo y la distancia?

Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática: fenómenos físicos y biológicos

Globo aerostático: físicos

Un globo aerostático asciende verticalmente. La distancia que hay entre el globo y la tierra está relacionada con el tiempo que transcurre al ascender.

El globo aerostático asciende por efecto del aire caliente en su interior.

Al registrar la información al respecto se obtuvo lo siguiente.

Tiempo (h)	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
Distancia (km)	0	1.5	2	1.5

1. Contesta lo que se señala en tu cuaderno.
   a. ¿Cómo se puede obtener la distancia entre el globo y la tierra a partir del tiempo?
   b. ¿Cuántos kilómetros habrá de distancia al cabo de 2 horas?
   c. ¿Qué ha sucedido con la distancia entre el globo y la tierra después de 2 horas?
   d. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la relación entre el tiempo y la distancia?
   e. ¿Cómo se puede obtener el tiempo a partir de la distancia?

Con ayuda de tu profesor, verifica los resultados con tus compañeros. En caso de encontrar diferencias, analicen a qué se debieron y efectúen las correcciones que sean necesarias.

Efectos nutricionales de los organismos: biológicos

Los científicos usualmente emplean ratones para experimentar con compuestos químicos y observar sus efectos. Martín es un científico que está analizando el efecto nutricional en ratones que se alimentaron con una dieta que contiene cierta cantidad de proteína. La proteína es una mezcla de yemas de huevo y harina de maíz. Al variar el porcentaje de yema en la mezcla, Martín observó cambios en el peso promedio de los ratones.

En los laboratorios se siguen estrictas medidas sanitarias cuando se trabaja con animales.

1. Observa la tabla con información al respecto y resuelve en tu cuaderno lo que se indica.

Porcentaje de yema en la mezcla (%)	10	20	30	40	50
Peso (g)	42	68	98	132	170

   a. Si se aumenta a 70 % la cantidad de yema, ¿cuál será el peso promedio de los ratones?
   b. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la relación entre el peso promedio de los ratones y el porcentaje de yema en la mezcla?

Con ayuda de tu profesor, verifica los resultados con tus compañeros. En caso de encontrar diferencias significativas, analicen a qué se debieron y corrijan lo que sea necesario.

PARA SABER MÁS

Las funciones de segundo grado o funciones cuadráticas se grafican con una parábola vertical y se utilizan para construir puentes, ya que las construcciones parabólicas son más económicas y resistentes. Además, se usan en la astronomía cuando se estudian los tránsitos y la velocidad de las naves en el espacio exterior.

Reto

Considerando el problema anterior, haz lo que se indica.

1. ¿Cómo se puede obtener el porcentaje de yema en la mezcla a partir del peso promedio de las ratas?
2. Escribe una expresión algebraica que represente el procedimiento para determinar el porcentaje de yema en la mezcla a partir del peso promedio.

AFORISMOS

"Con números se puede demostrar cualquier cosa."

Thomas Carlyle (1795-1881), historiador, pensador y ensayista inglés.

¿De qué manera se puede relacionar lo que dijo Thomas Carlyle con lo visto en la lección? ¿Consideras que los números pueden demostrar fenómenos de la naturaleza o situaciones de la vida real?

PARA TERMINAR

Analiza el problema y contesta las preguntas en tu cuaderno.

Un grupo de 30 turistas desea hacer un recorrido en un tren turístico. La empresa de turismo que promueve el viaje considera que el costo por persona será de \$350. Sin embargo, si acuden más personas, por cada viajero adicional el costo individual se reduce \$5.

1. ¿Cuál sería el ingreso de la empresa al hacer el recorrido con 30 personas?
2. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el procedimiento para obtener el ingreso de la empresa?
3. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el procedimiento para obtener el ingreso de la empresa considerando el número de personas adicionales y la reducción en el precio?
4. ¿Cuántos turistas debe llevar el tren para maximizar los ingresos de la empresa?

LECCIÓN 6

CONOCIMIENTO DE LA ESCALA DE LA PROBABILIDAD. ANÁLISIS DE LAS CARACTERÍSTICAS DE EVENTOS COMPLEMENTARIOS Y EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES E INDEPENDIENTES

Los sucesos a nuestro alrededor están sujetos a las leyes de la probabilidad. Diariamente, nos enfrentamos a experiencias aleatorias o impredecibles; por ejemplo, llegar puntualmente a la escuela implica una cierta probabilidad, dados los imprevistos del tiempo de llegada del metro, el autobús o el automóvil. Lo mismo se puede decir cuando se lanza una moneda y se desea saber la cara que caerá hacia arriba, pues no podemos afirmar con certeza cuál será.

Un relámpago es un evento aleatorio, ya que no se puede saber con certeza dónde y cuándo sucederá.

- ¿Recuerdas cómo se calcula la probabilidad de un evento?
- ¿Recuerdas qué es un espacio muestral?
- ¿Qué es un evento equiprobable?
- ¿Es la probabilidad una fracción?

PARA COMENZAR

Analiza el problema y contesta las preguntas en tu cuaderno.

Mario se reunió con sus amigos y les propuso un juego. En una urna depositó 3 bolas negras y 4 rojas. Les explicó que todas las bolas eran igualmente elegibles, que sacaría una al azar y ellos tendrían que adivinar el color.

1. Contesta las preguntas.
   a. ¿Cuál es el espacio muestral?
   b. ¿Cuántos elementos tiene el evento "la bola es roja"?
   c. ¿Cuántos elementos tiene el evento "la bola es negra"?
   d. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola sea negra?
   e. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola no sea negra?
   f. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola sea roja?
   g. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola sea azul?
   h. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola sea roja o negra?
   i. ¿Cómo se define la probabilidad de que suceda un evento *A* de un espacio muestral S?

Con ayuda de tu profesor, comparte tus respuestas con algún compañero. Si hay diferencias, analicen a qué se debieron y efectúen las correcciones que sean necesarias.

La probabilidad expresada como fracción

Con ayuda de tu profesor, reúnete con un compañero para resolver lo que se pide.

1. El número de elementos de cualquier evento de un espacio muestral siempre es __________ que el número de elementos del espacio muestral. Esto significa que al calcular la probabilidad de un evento el numerador siempre será ____________ que el denominador.

2. Si en una fracción el denominador es mayor o igual al numerador,
   a. ¿cuál es el mayor valor que puede adquirir la fracción?,
   b. ¿y el menor valor?

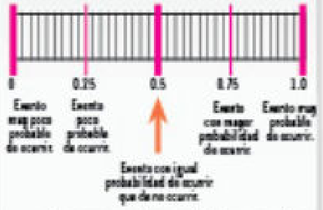
3. Den algunos ejemplos que ilustren las situaciones anteriores.
4. Conociendo que la probabilidad de que suceda un evento *A* de un espacio muestral S es
$$P(A) = \frac{\text{Número de elementos de } A}{\text{Número de elementos de S}}$$
   a. ¿Cuál es el menor valor de la probabilidad de que suceda un evento *A*?
   b. ¿Cuál es el mayor valor de la probabilidad de que suceda un evento *A*?
   c. De acuerdo con lo anterior, la probabilidad de que suceda un evento *A* de un espacio muestral S es un número entre _____ y _____.

5. Comparen los elementos de un evento y los del espacio muestral para determinar entre qué valores se encuentra el valor de la probabilidad de un evento cualquiera *A*.

Con la guía de su maestro, discutan con el grupo sus respuestas y lleguen a un resultado común.

PARA SABER MÁS

Con frecuencia, la escala de probabilidad se visualiza en una regla como se muestra en la figura siguiente.



Aunque cabe señalar que la probabilidad se refiere o se consigue cuando se repite muchas veces un evento aleatorio, es decir, si en un evento aleatorio el resultado esperado no sucede en las diez, veinte, treinta o más veces que se repite, esto no necesariamente significa que sea poco probable. De igual forma si sucede en las primeras veces, tampoco significa que el evento sea muy probable.

Elementos de una muestra

Se arroja un dado de seis caras y se anota el número que aparece. Para este experimento se definen dos posibles eventos:

- el evento *A*, que consiste en que el número que aparezca sea 3, y
- el evento *B*, que consiste en que aparezca cualquier otro número distinto de 3.

1. Lista entre llaves { } los elementos del espacio muestral S separando cada uno por una coma. A continuación responde las preguntas.
   a. ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral S de este experimento?
   b. ¿Cuántos elementos tiene el evento $A=\{3\}$?

2. Lista entre llaves { } los elementos del evento B separados por una coma.
   a. ¿Cuántos elementos tiene el evento B?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que suceda A?
   c. ¿Cuál es la probabilidad de que suceda B?
   d. ¿Cuánto resulta de sumar $P(A) + P(B)$?
   e. Si juntas los elementos de A con los elementos de B, ¿qué se obtiene?

Los dados de seis caras tienen forma cúbica y son comúnmente empleados en los juegos de azar; sin embargo, es posible construir dados con diferente número de caras empleando otros poliedros regulares.

Con ayuda de tu profesor, comparte tus repuestas con algún compañero. Si hay diferencias, analicen a qué se debieron y efectúen las correcciones que sean necesarias.

PARA RESOLVER

Con la coordinación de tu profesor, reúnete con un compañero y respondan en su cuaderno las preguntas planteadas después de analizar la información del problema.

Una urna contiene 5 bolas blancas y 3 bolas rojas. Todas las bolas son igualmente elegibles, se elige al azar una bola y se anota su color.

1. Contesta las preguntas.
   a. ¿Cuál es el espacio muestral?
   b. ¿Cuántos elementos tiene el evento "la bola es roja"?
   c. ¿Cuántos elementos tiene el evento "la bola es blanca"?
   d. Si A es el evento "la bola extraída es blanca", ¿cuál es la probabilidad $P(A)$?
   e. Si B es el evento "la bola extraída no es roja", ¿tienen elementos en común los eventos A y B?
   f. ¿Cómo son entre sí los eventos A y B?
   g. Con base en la probabilidad calculada de $P(A)$, ¿cuál es el valor de la probabilidad $P(B)$?

Con la ayuda de su profesor, comparen sus respuestas con otra pareja y lleguen a un consenso sobre la forma de calcular la probabilidad de un evento complementario con base en el otro evento.

Reto

Lee con atención y contesta lo que se pide.

Para jugar en la Lotería Nacional es posible adquirir un "entero" que consta de veinte "cachitos", siendo cada uno de éstos la veinteava parte del billete entero. La lotería ofrece diferentes sorteos con diferentes montos de premios cada semana.

1. Si se sabe que dos eventos son independientes cuando la realización de uno no afecta la realización del otro, ¿es cada sorteo de la Lotería Nacional un evento independiente? Justifica tu respuesta.

REFLEXIONA

Dos eventos A y B de un espacio muestral S son complementarios si son disjuntos (no tienen elementos en común) y su unión conforma el espacio muestral S. En otras palabras si A y B no tienen elementos en común y $P(A) + P(B) = 1$. En muchas ocasiones es más conveniente calcular la probabilidad del evento complementario que la del evento directo.

Probabilidad de eventos independientes

Con la guía de tu maestro, reúnete con un compañero. Analicen el experimento y luego respondan en su cuaderno las preguntas que se plantean.

1. Se lanzan dos monedas distintas y se anota la cara que aparece al caer. Si ambas monedas tienen águila por un lado y sol en el anverso, contesta lo siguiente.
   a. ¿Cuál es el espacio muestral de este experimento?
   b. ¿Cuál es la probabilidad $P(A)$ de que suceda el evento $A=\{$águila, águila$\}$?;
   c. ¿Cuál es la probabilidad $P(B)$ de que suceda el evento un águila y un sol indistintamente?
   d. ¿Cuál es la probabilidad $P(A)$ de que suceda el evento $A=\{$sol, sol$\}$?
   e. Si se lanza primero una moneda, ¿cuál es la probabilidad $P(A_1)$ de que aparezca un águila?
   f. Si se lanza después la otra moneda, ¿cuál es la probabilidad $P(A_2)$ de que aparezca también un águila?
   g. ¿Los eventos A_1 y A_2, son independientes o dependientes?
   h. ¿Cómo es $P(A)$ respecto a $P(A_1)$ y $P(A_2)$?
   i. Sin hacer cálculos numéricos, ¿cuál será la probabilidad de que primero salga un sol y después otra vez sol?
   j. ¿Cuál será la relación que define la probabilidad de que sucedan dos eventos independientes respecto a la probabilidad de cada uno?

Con la coordinación de tu profesor, discutan con otra pareja los resultados obtenidos y la fórmula a la que llegaron para calcular la probabilidad de dos eventos independientes. Después, comparen su resultado con el resto del grupo. En caso de encontrar diferencias, soliciten la ayuda de su maestro para llegar a un acuerdo.

Tarea en casa

Analiza el problema y contesta en tu cuaderno lo que se pide.

Una línea de producción de focos ha determinado, con base en su experiencia, que la probabilidad de que un foco salga defectuoso es de uno en mil.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer un foco de una línea de mil salga defectuoso?
2. Una vez extraído el primero, ¿cuál es la probabilidad de que al extraer otro foco de la siguiente línea de mil salga defectuoso?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer los dos focos antes mencionados, éstos resulten defectuosos en la producción?

PARA TERMINAR

Con la ayuda del profesor, formen equipos de tres compañeros y analicen el planteamiento.

Una urna contiene 4 bolas negras, 5 bolas blancas y 3 bolas rojas. Se extrae una bola, se anota su color y se regresa a la urna. Se extrae una segunda bola, se vuelve a anotar su color y se regresa a la urna. Se repite lo mismo por tercera vez. Todas las bolas son igualmente elegibles y se eligen al azar las 3 bolas en cada extracción.

1. Partiendo de esta información, respondan las preguntas.
   a. ¿Cuál es el espacio muestral?
   b. ¿Cuántos elementos tiene el evento "la bola es roja"?
   c. ¿Cuántos elementos tiene el evento "la bola es negra"?
   d. ¿Cuántos elementos tiene el evento "la bola es blanca"?
   e. Si A es el evento "la bola extraída es blanca", ¿cuál es la probabilidad $P(A)$?
   f. Si B es el evento "la bola extraída es roja", ¿cuál es la probabilidad $P(B)$?
   g. Si C es el evento "la bola extraída es negra", ¿cuál es la probabilidad $P(C)$?
   h. Si D es el evento "una bola extraída es negra y las dos restantes son rojas", ¿cuál es la probabilidad $P(D)$?
   i. Si E es el evento "las dos primeras bolas extraídas son blancas y la tercera es negra", ¿cuál es la probabilidad $P(E)$?
   j. Si F es el evento "las tres bolas extraídas son blancas", ¿cuál es la probabilidad $P(F)$?

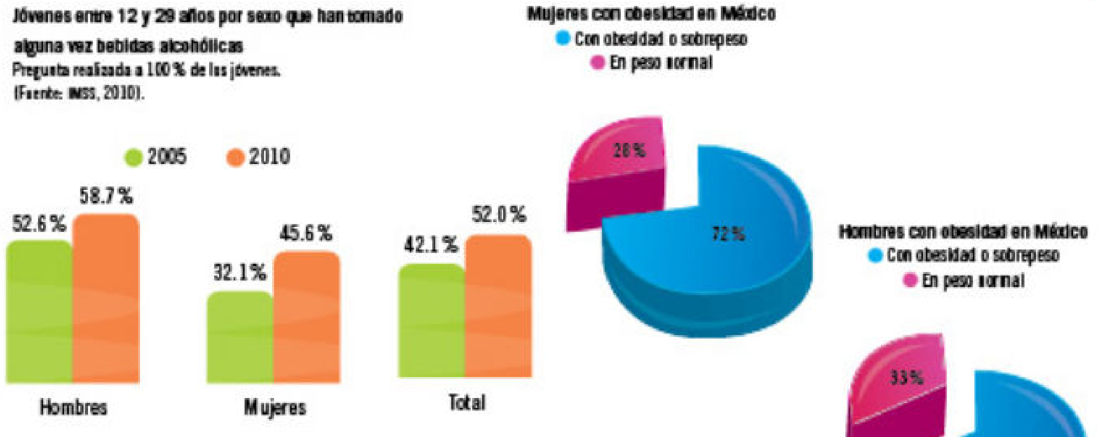
Con la orientación de su profesor, comparen sus respuestas con los demás equipos y lleguen a un consenso sobre la forma de calcular la probabilidad de eventos independientes.

LECCIÓN 7

DISEÑO DE UNA ENCUESTA O UN EXPERIMENTO E IDENTIFICACIÓN DE LA POBLACIÓN EN ESTUDIO. DISCUSIÓN SOBRE LAS FORMAS DE ELEGIR EL MUESTREO. OBTENCIÓN DE DATOS DE UNA MUESTRA Y BÚSQUEDA DE HERRAMIENTAS CONVENIENTES PARA SU PRESENTACIÓN

Las estadísticas muestran diversos problemas de salud que prevalecen en nuestro país; por ejemplo, la obesidad, la cual es alarmante porque incrementa el riesgo de padecer enfermedades cardiovasculares, diabetes e hipertensión, por ejemplo. Otros casos son el alcoholismo y la drogadicción, que de la misma forma destruyen la salud y el entorno de vida. Generalmente, son más frecuentes en los adolescentes, como lo indican algunas estadísticas proporcionadas por los distintos sectores de salud en México.

- ¿Qué es una estadística?
- ¿Cómo recaban esos datos?
- ¿Qué se entiende por población?



La mitad de los jóvenes reportó haber probado el alcohol alguna vez en su vida. La cerveza es la bebida alcohólica más consumida por los jóvenes. En comparación con 2005, el cambio porcentual más importante se da en las mujeres, quienes pasaron de 32.1 % a 45.6 %. (Fuente: *Encuesta Nacional de la Juventud*, 2010).

Estadísticas sobre casos de obesidad y alcoholismo.

PARA COMENZAR

Con ayuda de su profesor, formen cuatro equipos para realizar una encuesta en su escuela. Enumeren los equipos (1, 2, 3 y 4) y a continuación diseñen un cuestionario con el objetivo de recopilar la información siguiente.

- Edad.
- Sexo.
- Peso.
- Estatura.
- Saber si usan teléfono celular o no.
- Gasto semanal de teléfono celular.
- Tiempo utilizado en redes sociales al día.
- Si fuman.
- Si han consumido alguna vez bebidas alcohólicas.
- Si conocen a alguien que haya consumido alguna vez algún tipo de droga.

1. La encuesta debe ser anónima, por tanto, el nombre no es necesario. Se aplicará a dos grupos de tercero, uno de segundo y uno de primero.
2. Cuando hayan terminado la encuesta, reúnan los cuestionarios de los cuatro equipos y numérenlos para saber cuántos cuestionarios se aplicaron en total. Consideren que se trata de una sola encuesta aplicada por los diferentes equipos de tu grupo. Después, cada equipo deberá responder las preguntas siguientes.
   a. ¿Cuántos cuestionarios aplicaron?
   b. ¿Cuántos estudiantes tiene la escuela?
   c. ¿Por qué no es necesario aplicar el cuestionario a todos los estudiantes de su escuela?
   d. ¿Cómo llamarían al conjunto que representa la totalidad de los estudiantes de su escuela?
   e. ¿Cómo llamarían al conjunto de los estudiantes seleccionados, es decir, a quienes aplicaron el cuestionario?
   f. Describan el proceso que realizaron para la recopilación de los datos.
   g. En un paso posterior, la información tendrá que ser organizada, analizada e interpretada. Cuando se haya hecho esto, ¿cuál será la forma más conveniente de presentar los resultados obtenidos en la encuesta?

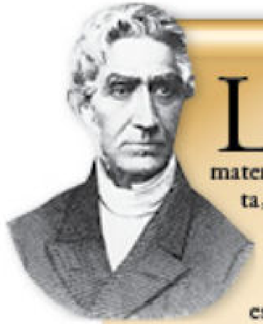
PARA SABER MÁS

La información sobre un hecho o una situación determinada puede surgir a partir de un problema de investigación, siguiendo los pasos siguientes.

- Planteamiento del problema.
- Determinación de los objetivos.
- Planteamiento de la hipótesis.
- Definición de la unidad de información.
- Determinación de las unidades de medida.
- Determinación de la población.
- Determinación de la muestra.
- Recolección de la información.
- Revisión de la información.
- Tabulaciones.
- Análisis de la información.
- Publicación del reporte.

Compartan sus respuestas entre equipos, con la guía de su profesor. Discutan cuáles son las maneras más adecuadas para proceder a organizar la información recopilada.

MATEMÁTICAS HISTÓRICAS



Lambert Adolphe Jacques Quételet (1796-1874) fue astrónomo, naturalista, matemático, sociólogo y estadista, quien aplicó el método estadístico al estudio de la sociología.

Realizó el primer análisis estadístico del primer censo nacional de Bélgica en 1829, anotando la influencia que sobre la mortalidad tenían la edad, el sexo, la estación, la profesión y la situación económica, con lo que hizo notar la importancia de este tipo de análisis para los seguros de vida.

Los estudios estadísticos de Quételet lo convencieron de que hasta cierto punto es posible predecir matemáticamente la criminalidad en una población dada.

A Quételet se le debe el valioso, aunque algo infame, concepto del "Hombre medio" (*L'homme moyen*). Aplicó métodos a conjuntos y es reconocido como uno de los padres de la estadística moderna.

Fuente: *Resourses on Adolphe Quetelet: statistician, sociologist, demographer*, de Ronald E. Wyllys.

PARA RESOLVER

Lee y analiza el planteamiento.

En un censo de Nezahualcóyotl, Estado de México, hay 1 500 estudiantes. Un investigador deseaba tener una idea acerca de las horas diarias que los alumnos dedican a estudiar. Seleccionó a varios alumnos mediante un muestreo aleatorio simple y luego ordenó en una tabla la información obtenida.

Tiempo en horas dedicado al estudio							
0.05	0.24	0.55	1.20	2.10	2.52	3.48	6.21
0.11	0.38	0.86	1.60	2.12	2.55	3.83	7.56
0.18	0.42	0.88	1.90	2.19	2.56	5.12	7.68
0.21	0.44	0.92	1.98	2.21	3.03	5.20	8.15
0.24	0.53	1.02	2.06	2.23	3.34	5.56	8.75

1. Con la información de la tabla, realiza lo que se indica y contesta las preguntas en tu cuaderno.
   a. Construye una tabla de frecuencias para los datos anteriores.
   b. Construye una gráfica de barras.
   c. ¿Cuál es el tiempo promedio que los estudiantes emplean para estudiar?
   d. ¿Cuál es el tiempo de estudio que apareció con mayor frecuencia en la muestra?
   e. Escribe cuál fue el tiempo mínimo que dedican a estudiar los alumnos de la muestra.

Con la ayuda de tu profesor, compara tus respuestas con algún compañero. En caso de encontrar diferencias en los resultados, analicen a qué se debieron y efectúen las correcciones necesarias.

Tipos de muestreo

Cada equipo, conformado con anterioridad, trabajará la información obtenida de la encuesta de acuerdo con los métodos propuestos más adelante. Recuerden que la encuesta es anónima, no se requiere nombre. Numeren cada cuestionario.

Para continuar con el trabajo, cada equipo realizará una actividad diferente, como se indica a continuación.

Actividad para el equipo 1. Muestreo aleatorio simple

El equipo 1 representará mediante la letra "N" al número total de estudiantes encuestados de los cuatro grupos. Para saber el valor de N basta con contar el total de cuestionarios aplicados.

Elijan al azar 20 cuestionarios (esta cantidad se representa con la letra "n") entre los N seleccionados, por ejemplo los cuestionarios 2, 5, 12, entre otros.

Escriban sus números elegidos en una lista, puesto que ésos serán los elementos que integrarán la muestra.

Actividad para el equipo 2. Muestreo aleatorio sistemático

De la totalidad de los cuestionarios numerados, primero determinen un intervalo constante mediante la fórmula $\frac{N(\text{población})}{n(\text{muestra})} = \frac{P}{20} = k$. La letra N (población) corresponde al total de cuestionarios; la letra n corresponde a una muestra del total de cuestionarios, en este ejemplo se consideran 20 cuestionarios. Para determinar cuáles serán esos 20 cuestionarios, se lleva a cabo el procedimiento siguiente.

PARA SABER MÁS

La probabilidad es una medida que expresa de qué manera puede ocurrir un suceso o fenómeno, es decir, la razón entre los eventos favorables y el total de eventos posibles. Esta razón constituye el espacio muestral del experimento. La escala de probabilidad abarca desde el 0 hasta el 1, siendo la probabilidad 0 un evento imposible y la probabilidad 1, un evento que ocurrirá con toda seguridad. Los valores intermedios reflejan, por ejemplo, si un suceso ocurrirá de manera improbable o remota (en valores cercanos a 0), de manera moderada (en valores cercanos a 0.5) o de manera frecuente (en valores cercanos a 1).

Apliquen la fórmula para obtener el valor de k. Enseguida, elijan un número al azar entre uno y el valor obtenido para k; como en este momento no es posible determinar este valor, le llamaremos i.

Ahora, los elementos que integrarán la muestra son los que ocupan los lugares i, $i+k$, $i+2k$, $i+3k$,..., $i+(n-1)k$. Por ejemplo, si el total de los grupos encuestados fuera de 300 estudiantes ($N=300$) y la muestra fuera de 20 ($n=20$), entonces de acuerdo con la fórmula $k=\frac{300}{20}=15$, podemos elegir un número al azar entre 1 y 15 (el número representado por la letra i). Por ejemplo, si eligiéramos $i=5$, entonces los elementos a elegir de la lista serían los siguientes.

- $i=5$
- $i+k=5+15=20$
- $i+2k=5+2(15)=35$
- $i+3k=5+3(15)=50$
- Y así sucesivamente…

Esto significa que la muestra estará integrada por los cuestionarios numerados como 5, 20, 35, 50,..., 290. Si el número k calculado no fuera entero, para facilitar la obtención de la muestra habrá que redondear el valor de k al entero más cercano.

Partiendo de la población obtenida N y con una muestra $n=20$, calculen el número k y elijan al azar el número i. Escriban a continuación los números de cuestionarios que resulten seleccionados con este método.

PARA SABER MÁS

La noción de estadística se derivó originalmente del vocablo "estado", porque ha sido función de los gobiernos centrales llevar registros de población, nacimientos, defunciones, vocaciones, cosechas, impuestos y otras cosas y actividades. Contar y medir estos hechos genera muchas clases de datos numéricos.

Algunas personas conciben la estadística como columnas de cifras o gráficas en zigzag de los diarios, asociados con índices de divorcios y criminalidad, precios de acciones, exportaciones e importaciones, entre otros. Este concepto se aproxima mucho a la definición tradicional de estadística: la compilación, organización, resumen, presentación y análisis de datos numéricos. Sin embargo, actualmente, muchos autores definen la estadística como un método de toma de decisiones frente a la incertidumbre, pues la función principal de la estadística es elaborar principios y métodos que nos ayuden a tomar decisiones frente a la incertidumbre.

Actividad para el equipo 3. Muestreo aleatorio estratificado

Dividan la totalidad de los estudiantes (N) de los grupos elegidos en dos grupos, uno de mujeres y otro de hombres, separando los cuestionarios. Ahora vuelvan a subdividir cada uno de los grupos de hombres y mujeres, por edades de 12, 13 y 14 años o más.

Cuando el equipo haya separado de esta manera todos los cuestionarios, seleccionen al azar:

- 5 estudiantes mujeres de 12 años, 5 de 13 años y 5 de 14 años o más, 15 en total;
- 5 estudiantes hombres de 12 años, 5 de 13 años y 5 de 14 años o más, 15 en total.

De esta selección se conformará la muestra ($n = 30$) de donde tomarán los datos.

Actividad para el equipo 4. Muestreo aleatorio por conglomerado

De la totalidad de los estudiantes de los grupos elegidos (N), hagan una división de cuestionarios en subgrupos de 5 estudiantes; por ejemplo, si $N=300$, al subdividir en subgrupos de 5 obtendrán 60 subgrupos. Ahora seleccionen de forma aleatoria simple 4 subgrupos de 5 estudiantes. Ésta será la muestra elegida ($n = 20$).

Aspectos a considerar por los equipos

Con ayuda de su profesor, determinen cómo se organizarán para compartir las encuestas en caso de que dos o más equipos requieran un mismo cuestionario para trabajar. Pueden recurrir a fotocopias, o mejor aún, si les sobraron cuestionarios transcriban la información y el número de cuestionario; de esta manera, todos los equipos podrán trabajar al mismo tiempo. Otra posibilidad sería que cada equipo trabajara en un tiempo diferente al resto de los equipos.

Tarea en casa

Escribe en tu cuaderno los pasos necesarios para elaborar una tabla de frecuencias para la interpretación y análisis de resultados, desde el proceso de selección de la muestra hasta llegar a la construcción de la gráfica de barras.

Análisis y representación de datos estadísticos

Una vez que cada equipo haya determinado la muestra con la que va a trabajar, se puede afirmar que han obtenido sus datos estadísticos. El paso siguiente consiste en procesarlos y presentarlos de una manera clara y entendible, por medio de un análisis que arroje medidas de posición y de dispersión que permitan analizar el comportamiento del fenómeno en estudio.

1. Con las muestras que cada equipo definió, efectúen los cálculos.
   a. Determinen la media en cada caso para la edad, peso, estatura, gasto semanal de celular y tiempo en redes sociales al día.
   b. Determinen la moda para las preguntas por sexo, si usan celular, si han consumido alguna vez bebidas alcohólicas, si han fumado alguna vez y si conocen a alguien que haya consumido algún tipo de droga.

2. A continuación, con la guía de su profesor, cada equipo realice el análisis siguiente, utilicen los datos obtenidos en la actividad que le tocó llevar a cabo. Cada uno de los equipos debe anotar sus valores en las tablas.

	Registro de información				
	Edad (años cumplidos)	Estatura (cm)	Peso (kg)	Gasto semanal celular ($)	Tiempo en redes sociales al día (h)
Estudiante 1					
Estudiante 2					
Estudiante 3					
Estudiante 4					
Estudiante 5					
Estudiante 6					
Estudiante 7					
Estudiante 8					
Estudiante 9					
Estudiante 10					
Estudiante 11					
Estudiante 12					
Estudiante 13					
Estudiante 14					
Estudiante 15					
Estudiante 16					
Estudiante 17					
Estudiante 18					
Estudiante 19					
Estudiante 20					

	Registro de información				
	Sexo (M) masculino (F) femenino	Usa celular 1 (sí) 2 (no)	Ha fumado al menos una vez 1 (sí) 2 (no)	Consumió bebidas alcohólicas al menos una vez 1 (sí) 2 (no)	Conoce a alguien que haya usado drogas 1 (sí) 2 (no)
Estudiante 1					
Estudiante 2					
Estudiante 3					
Estudiante 4					
Estudiante 5					
Estudiante 6					
Estudiante 7					
Estudiante 8					
Estudiante 9					
Estudiante 10					
Estudiante 11					
Estudiante 12					
Estudiante 13					
Estudiante 14					
Estudiante 15					
Estudiante 16					
Estudiante 17					
Estudiante 18					
Estudiante 19					
Estudiante 20					

3. Contesten las preguntas en su cuaderno y efectúen los cálculos que se solicitan.
   a. ¿Fueron diferentes las medias obtenidas en cada actividad?, ¿por qué?
   b. ¿Fueron parecidas las medias obtenidas en cada actividad?, ¿por qué?
   c. Determinen la media de las medias obtenidas para la edad.
   d. Encuentren la media de las medias obtenidas para el peso.
   e. Hallen la media de las medias obtenidas para la estatura.
   f. Determinen la media de las medias obtenidas para el gasto semanal de celular.
   g. Encuentren la media de las medias obtenidas para el tiempo en redes sociales al día.
   h. ¿Fueron parecidas las modas obtenidas en cada actividad?, ¿por qué?
   i. ¿Fueron diferentes las modas obtenidas en cada actividad?, ¿por qué?
   j. Determinen la moda obtenida en cada actividad para la pregunta: "¿Han consumido alguna vez bebidas alcohólicas?".
   k. Hallen la moda de las modas obtenidas para la pregunta: "¿Han fumado alguna vez?".
   l. Encuentren la moda de las modas obtenidas para la pregunta: "¿Conocen a alguien que haya consumido algún tipo de drogas?".
   m. Calculen la moda de las modas obtenidas para determinar el sexo.
   n. Determinen la moda de las modas obtenidas para la pregunta: "¿Usan celular?".

4. Con la guía de su profesor, realicen una discusión grupal acerca de los aspectos siguientes.
   a. ¿Cuál fue la razón por la que las medias obtenidas en las actividades realizadas por cada equipo se parecen o no se parecen?

b. ¿Tiene que ver con el método o la forma en que se llevó a cabo la encuesta?
c. ¿Las conclusiones obtenidas serán válidas para toda tu escuela?
d. ¿Por qué las modas obtenidas en las actividades 1, 2, 3 y 4 se parecen o no?
e. ¿Tiene que ver con el método o la forma en que se llevó a cabo la encuesta?
f. ¿Las conclusiones serán válidas para todos los estudiantes de secundaria de tu estado?, ¿por qué?
g. ¿Las conclusiones serán válidas para todos los estudiantes del país?, ¿por qué?

5. Con el apoyo de tu profesor, construye una gráfica circular o una de barras con los valores de las tablas de las páginas 56 y 57. Posteriormente, contesta las preguntas y haz lo que se pide.
   a. Describe paso a paso el procedimiento empleado para la construcción de tu gráfica.
   b. ¿Fue fácil construir la gráfica?, ¿por qué?
   c. En caso de utilizar porcentajes, ¿qué tipo de gráfica es más conveniente?
   d. ¿En qué caso es más conveniente utilizar gráficas de barras?

6. Con ayuda del profesor, revisa tus resultados con tus compañeros y compara tus gráficas con las de la página 51.
   a. ¿Son parecidos los resultados?
   b. ¿Por qué consideras que sí se parecen o que no se parecen?

PARA RESOLVER

Reúnete con un compañero y resuelvan.

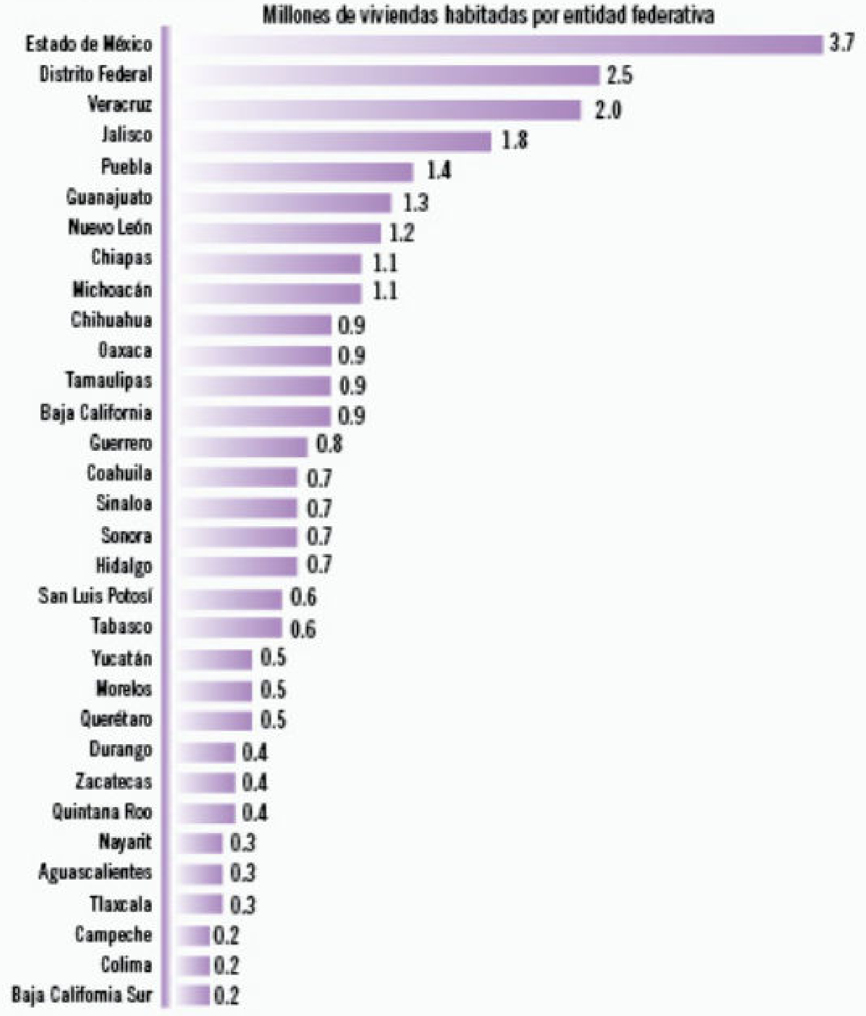
1. Respondan las preguntas con base en las actividades.
   a. ¿Cómo se le conoce al conjunto que representa la totalidad de los estudiantes elegidos de la secundaria de tu escuela?
   b. ¿Cómo se llama al conjunto de 20 encuestas elegidas para el análisis?
   c. ¿Qué nombre reciben el conjunto de procedimientos utilizados para seleccionar los elementos de la muestra?
   d. ¿Cómo se le llama a la muestra seleccionada de manera que cada elemento de la población tiene la misma probabilidad de ser seleccionado?
   e. ¿Cuál es la muestra del muestreo aleatorio sistemático?
   f. ¿Cómo se le llama a la muestra que se obtiene estratificando el muestreo y seleccionando después un número fijo de elementos de cada estrato mediante un muestreo aleatorio simple?
   g. ¿Cómo se obtiene la muestra aleatoria por conglomerado?
   h. ¿Cuál sería la forma más conveniente de presentar la información obtenida mediante la organización, análisis e interpretación de los datos obtenidos en la encuesta?

Con ayuda de su profesor, compartan sus resultados con otras parejas. En caso de ser diferentes, determinen por qué y efectúen las correcciones necesarias.

Tarea en casa

En la imagen de abajo se muestra información del Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI) sobre las viviendas habitadas por entidad federativa en la República Mexicana en el censo del año 2010.

1. Analiza la gráfica y responde las preguntas en tu cuaderno.



Datos del INEGI sobre viviendas habitadas.

   a. Menciona tres estados donde haya oportunidad para una empresa dedicada al desarrollo de la vivienda. ¿Por qué razón consideraste dichos estados?
   b. Menciona tres estados donde el gobierno requiera un control y restricciones para la planificación y desarrollo de nuevas viviendas. Argumenta tu respuesta.
   c. ¿Qué estado representa mejor la media de viviendas habitadas?, ¿por qué?
   d. ¿De qué manera obtiene el INEGI la información?

Con ayuda del profesor, comenta tus respuestas con tus compañeros. Para el inciso c, si tienen diferencias, analicen a qué se debieron y hagan las correcciones necesarias.

Reto

Construye gráficas circulares para presentar la información siguiente.

1. En el mes de diciembre el estado de Chiapas registró que 97.97 % de los trabajadores urbanos se encontraban asegurados, contra 2.03 % de trabajadores del campo.
2. En el mismo mes, a nivel nacional, se registró 94.49 % de trabajadores urbanos asegurados contra 5.51% de trabajadores del campo.

Fuente: *Chiapas. Estadísticas de Trabajadores Asegurados mes 2010.* Comité Estatal de Información Estadística y Geográfica de Chiapas.

PARA TERMINAR

Plantea en tu cuaderno un problema relacionado con algún tema de tu interés, donde expliques por qué utilizarías el método de muestreo aleatorio simple.

Para ayudarte en el planteamiento de tu problema, analiza el esquema donde se te presenta el proceso estadístico que debes seguir.

Proceso estadístico

Autoevaluación

Lee en la primera columna los aspectos que vas a evaluar y marca con una equis (✗) el resultado que obtuviste de acuerdo con tu opinión. Luego intercambia tu libro con algún compañero para que te evalúe. Cuando te regrese el libro, revisa las diferencias entre lo que él opina y lo que tú registraste, y comenta con él aquellos aspectos en los que tengas dudas; esto te ayudará a darte cuenta de cuáles son los que deberás reforzar o volver a estudiar. Después, el profesor te apoyará a establecer las acciones necesarias para que avances en tu proceso de aprendizaje de los contenidos de la asignatura.

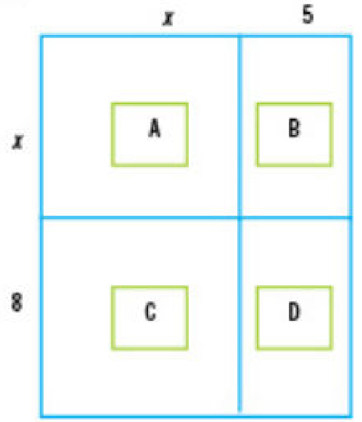
		Según mi opinión			Según la opinión de mis compañeros			Recomendaciones de mi profesor
		Sí	Aún tengo dudas	No	Sí	Aún tiene dudas	No	
Conocimientos y habilidades	Puedo explicar la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.							

Evaluación

Lee y contesta las preguntas como se indica en cada caso.

Patrones y ecuaciones

1.1 Un terreno comercial tiene forma cuadrada, pero el dueño logra adquirir un poco más de terreno, de modo que aumenta 5 m al frente y 8 m al fondo, como se muestra en la figura.



PREGUNTA 1. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área de la porción B?

PREGUNTA 2. ¿Cuánto mide el área de la porción D?

PREGUNTA 3. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área de todo el terreno?

Evaluación

Figuras y cuerpos

1.2 Para la construcción de figuras semejantes o congruentes se puede emplear regla y compás, o bien, un par de escuadras.

PREGUNTA 4 Anota en los paréntesis la letra que corresponda para obtener la respuesta correcta.

a. Criterio LLL b. Congruente c. Semejantes
d. Homólogos e. Criterio LLA

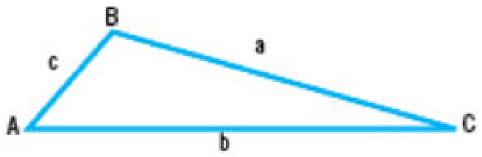
( ) Si en dos triángulos sus lados correspondientes tienen la misma longitud y sus ángulos correspondientes tienen la misma medida.

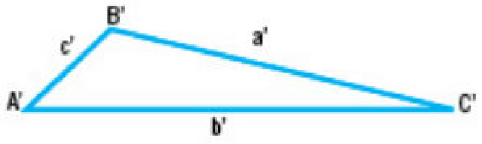
( ) Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente igual dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos.

( ) En los triángulos ABC y A'B'C', ¿Qué tipo de lados son a y a', b y b', c y c'?

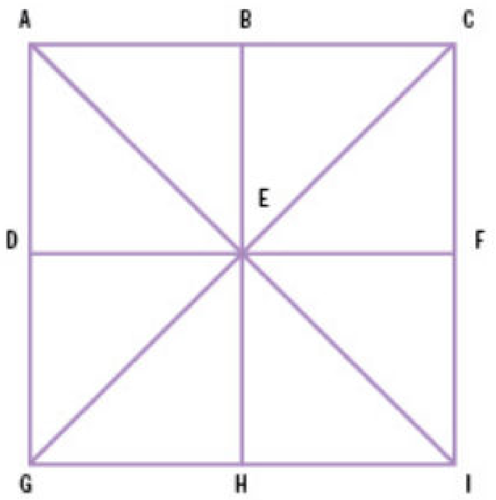
( ) Si en dos triángulos sus tres lados son respectivamente congruentes con los del otro, entonces los triángulos son congruentes.

( ) Si en dos triángulos sus ángulos son iguales y sus lados homólogos son proporcionales, se dice que los triángulos son:





1.3 Los segmentos AC, DF y GI son paralelos. AB = HI = 2 cm, CF = AB = DG y los ángulos $\angle G = 45°$ y $\angle E = 45°$.



PREGUNTA 5 Según la figura anterior, los triángulos GEH y CEF son ____________ porque sus ángulos G = 45° y E = 45° son ____________ y sus lados GH y HE son ____________ a EF y FC, respectivamente.

PREGUNTA 6 Los triángulos GHE y GIC son ____________ porque sus lados GH y GI, así como sus lados GE y GC son ____________ y el ____________ entre ellos mide lo mismo.

Proporcionalidad y funciones

1.4 En la tabla siguiente se muestra la relación entre las cantidades de harina y azúcar para la elaboración de cierto tipo de pan.

Gramos de harina	25	50	75	100		150	175
Gramos de azúcar	7	14		28	35	42	

PREGUNTA 7 Anota dentro del paréntesis la letra que corresponda para obtener la respuesta correcta.

a. 56 b. 49 c. 125 d. 2 e. 21

( ) ¿Cuántos gramos de azúcar se requieren para 75 g de harina?

( ) ¿Cuántos gramos de azúcar se requieren para 200 g de harina?

( ) ¿Cuántos gramos de harina se emplean con 35 g de azúcar?

( ) ¿Cuál es la constante k de proporcionalidad?

( ) ¿Cuántos gramos de azúcar se emplean con 175 g de harina?

1.5 Una cámara fotográfica experimental permite cubrir cierta área de un paisaje, en la medida que se acerca o se aleja, como se muestra en la tabla siguiente.

Distancia (m)	0.5	1	1.5	2	
Área cubierta (m²)	1	4		16	25

PREGUNTA 8 ¿Cuántos metros cuadrados medirá el área de la imagen proyectada en la pantalla, si la distancia entre el proyector y la pantalla es de 3 m?

a. $64\,m^2$
b. $81\,m^2$
c. $36\,m^2$
d. $25\,m^2$

PREGUNTA 9 ¿Cuál es la expresión algebraica que nos permite obtener el área de una imagen proyectada a partir de cualquier distancia?

a. $A(d) = (kd)^2$
b. $A(d) = -kd^2$
c. $-x^2 + 4x = 25$
d. $4x^2 = 25$

PREGUNTA 10 Si se desea abarcar un área de $9\,m^2$, ¿a qué distancia se debe colocar la cámara?

a. d = 2.5 m
b. d = 3 m
c. d = $3.5\,m^2$
d. d = 1.5 m

Nociones de probabilidad

1.6 Armando visitó una feria en un pueblo y se topó con un juego de azar. En dos tómbolas colocaron esferas numeradas del 1 al 4, de modo que antes de extraer una bola de cada una, el jugador podía elegir un número entre 2 y 8, correspondiente a la suma de las dos bolas.

PREGUNTA 11 ¿Cuál es el espacio muestral?

PREGUNTA 12 ¿Cuántos elementos tiene el evento "la suma de las bolas es 3"?

a. 3 b. 2 c. 1 d. 5

PREGUNTA 13 ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de las bolas no sea 5?

a. P(no 5) = 25% c. P(no 5) = 20%

b. P(no 5) = 50% d. P(no 5) = 75%

PREGUNTA 14 ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de las bolas sea 4 o 6?

a. P (4 o 6) = 0
b. P (4 o 6) = 1
c. P (4 o 6) = 37.5%
d. P (4 o 6) = 62.5%

Análisis y representación de datos

1.7 La estadística estudia la recolección, análisis e interpretación de datos de una muestra representativa, ya sea para ayudar en la toma de decisiones o para explicar condiciones regulares o irregulares de algún fenómeno o estudio aplicado, de ocurrencia en formas aleatoria o condicional.

PREGUNTA 15 ¿Qué nombre recibe el conjunto de elementos de referencia sobre el que se realizan las observaciones?

a. Muestra.
b. Población.
c. Media.
d. Muestreo aleatorio.

PREGUNTA 16 Es el valor con una mayor frecuencia en una distribución de datos.

a. Media. b. Muestra. c. Población. d. Moda.

BLOQUE 2

Aprendizajes esperados

Al finalizar este bloque, serás capaz de lo siguiente.

- Explicar el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identificar las propiedades que se conservan.
- Resolver problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.

SEMANA	TEMA	SUBTEMA
EJE: SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO		
1	Patrones y ecuaciones	2.1 Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.
EJE: FORMA, ESPACIO Y MEDIDA		
2	Figuras y cuerpos	2.2 Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.
3		2.3 Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.
4	Medida	2.4 Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.
5		2.5 Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.
EJE: MANEJO DE LA INFORMACIÓN		
6	Nociones de probabilidad	2.6 Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).
EVALUACIÓN		

El triángulo es la figura plana más sencilla; sin embargo, es tanto lo que se puede hacer con un triángulo, que desde la antigüedad se le ha estudiado para descubrir sus propiedades. En la construcción de puentes es recurrente la aplicación del triángulo. ¿Cuántos tipos diferentes de triángulos puedes identificar en la imagen? ¿En qué tipo de triángulos se aplica el teorema de Pitágoras?

SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO

LECCIÓN 1

USO DE ECUACIONES CUADRÁTICAS PARA MODELAR SITUACIONES Y RESOLVERLAS USANDO LA FACTORIZACIÓN

¿Cuánto deben medir los lados de un terreno rectangular para abarcar un área determinada? ¿Cómo se construye una caja para que contenga un volumen dado? ¿Cómo se representa la venta de ciertos artículos? ¿Qué altura alcanza una pelota al ser lanzada de manera vertical? Muchos fenómenos y situaciones cotidianas pueden ser modelados o representados por medio de expresiones matemáticas, esto permite analizar y resolver muchos problemas que enfrentamos diariamente.

PARA COMENZAR

Analiza el problema siguiente y realiza lo que se pide.

Ramón compró un terreno rectangular para construir su casa. Las medidas del terreno se muestran en la imagen siguiente.

x

$x + 3$

1. Escribe una expresión matemática que represente el área del rectángulo mostrado en la imagen.

$$A = (\quad)(\quad)$$

2. Si el terreno tiene un área $A = 18\ m^2$, escribe una expresión matemática que modele o describa la situación planteada.
3. Analiza la expresión que escribiste.
   a. ¿Qué diferencia encuentras entre esta expresión respecto a las que estudiaste en la primera lección del bloque 1?
   b. ¿Cómo resolverías esta ecuación?

Continúa...

4. Resta 18 al primero y al segundo miembro de la igualdad anterior y escribe la expresión obtenida.
5. Encuentra dos números que cumplan las condiciones siguientes.
   a. Que al multiplicarlos el resultado sea 18.
   b. Que al sumarlos o restarlos el resultado sea 3.

6. Completa los espacios en blanco con los números que obtuviste y desarrolla el producto, ¿qué expresión resulta?

$$(x + \quad)(x - \quad) =$$

7. Compara las expresiones que obtuviste en los puntos 2 y 6, ¿cómo son?

Comparte tus procedimientos con el grupo y con tu profesor y lleguen a conclusiones comunes.

REFLEXIONA

Al proceso de descomponer un número o expresión matemática en el producto de dos o más factores se le conoce como factorización. Por ejemplo,

a) $18 = (6)(3)$
b) $x^2 + 3x = x(x + 3)$

La ecuación de segundo grado y la factorización en el modelado de problemas

1. Analiza la expresión $x^2 + 3x - 18 = 0$. Con base en los resultados anteriores, ¿cómo podrías factorizar o descomponer en factores esta expresión? Escribe en tu cuaderno la expresión factorizada.
2. Considera ahora la expresión que obtuviste en el punto anterior. Debido a que está igualada a 0, se requiere determinar los valores de x, tales que, sustituidos en la expresión y al hacer las operaciones respectivas, se obtenga como resultado 0.
   a. ¿Qué valor de x hace que el primer factor sea 0? Plantea una ecuación lineal para averiguarlo.
   b. ¿Qué valor de x hace que el segundo factor sea 0? Plantea una ecuación lineal para averiguarlo.
   c. ¿Cómo verificarías que los valores de x que calculaste efectivamente hacen que la ecuación $x^2 + 3x - 18 = 0$ dé por resultado 0? Comprueba tus resultados.

3. De los resultados que obtuviste, ¿cuál es el que tiene sentido para el problema de hallar la longitud de los lados del terreno rectangular de la imagen de la página 66? Explica brevemente por qué.

PARA SABER MÁS

Una ecuación cuadrática tiene la forma $ax^2+bx+c=0$, donde a, b y c son números cualesquiera con $a \neq 0$. Al término ax^2 se le llama término cuadrático, al término bx se le conoce como término lineal y c es el término independiente o constante. Una de las formas de resolver una ecuación cuadrática es factorizándola en dos factores lineales y resolviendo cada factor.

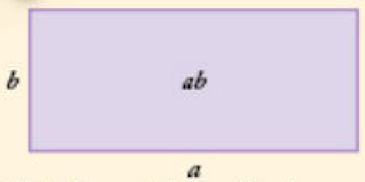
4. Con base en tus resultados, determina la longitud de cada uno de los lados del terreno de Ramón.
5. Con ayuda de tu profesor, comparte tus repuestas con un compañero. Si hay diferencias, analicen a qué se debieron.
   a. ¿Lograron factorizar la ecuación?
   b. ¿Plantearon correctamente las ecuaciones lineales para obtener los valores de x?
   c. ¿Calcularon correctamente las dimensiones del terreno?

Efectúen las correcciones pertinentes.

MATEMÁTICAS HISTÓRICAS

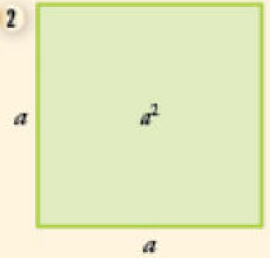
Euclides (325-265 a.n.e.), matemático y geómetra griego, en el "Libro II" de su obra magna, *Los Elementos*, ya mostraba cómo resolver problemas que involucraban ecuaciones cuadráticas. Sin embargo, tuvo que idear métodos geométricos para resolverlas, pues en ese entonces se carecía de un lenguaje algebraico como el actual. En las imágenes 1, 2 y 3 se muestran algunas representaciones gráficas de las que echó mano para representar expresiones cuadráticas.

1



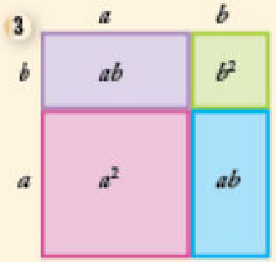
Producto ab representado como el área de un rectángulo, cuyos lados miden a y b, respectivamente.

2



Término cuadrático a^2 representado como el área de un cuadrado de lado a.

3



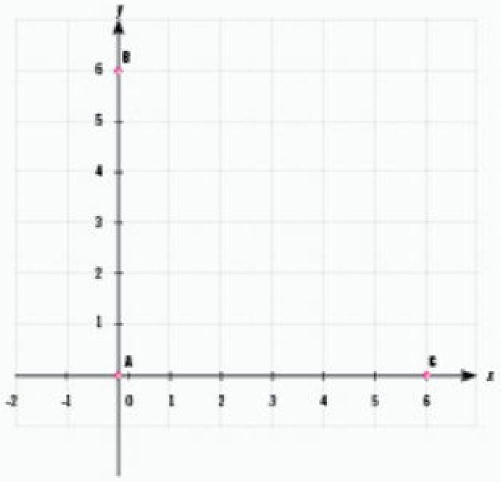
Producto $(a+b)^2$ representado como la suma de las áreas $ab+b^2+a^2+ab$. Es decir, $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

Fuente: *Historia y didáctica de la trigonometría*, de Francisco Luis Flores Gil.

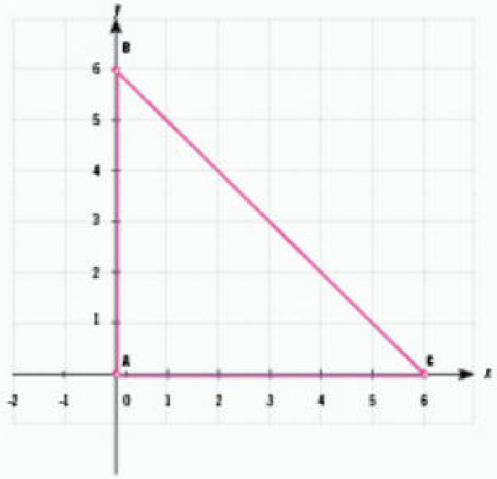
TIC

Realiza la actividad, utiliza el *software* de uso libre para geometría dinámica GeoGebra.

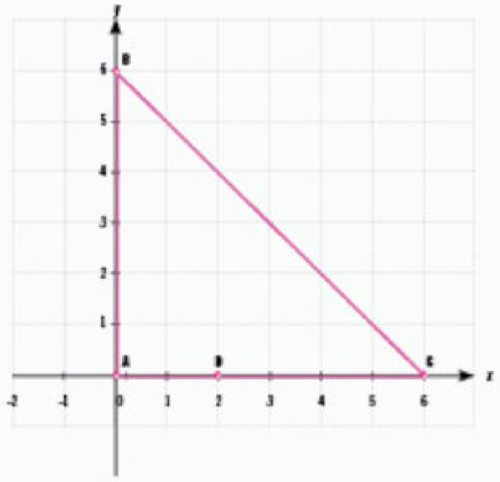
1. Usando la herramienta , coloca los puntos A, B y C.



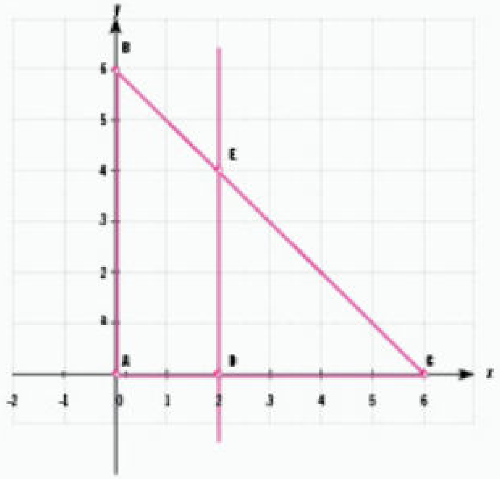
2. Usando la herramienta **Segmento entre Dos Puntos** , forma el triángulo ABC.



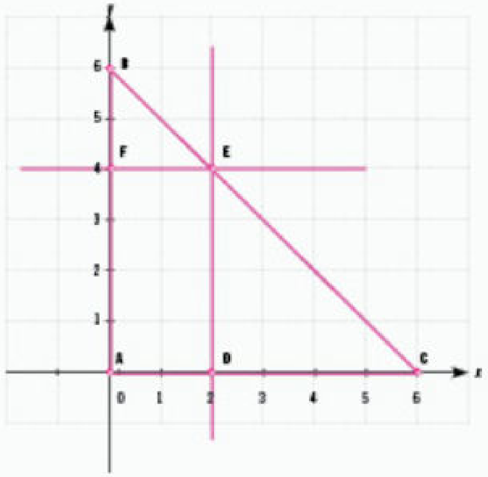
3. Auxiliándote de la herramienta **Punto nuevo**, marca el punto D sobre el segmento AC.



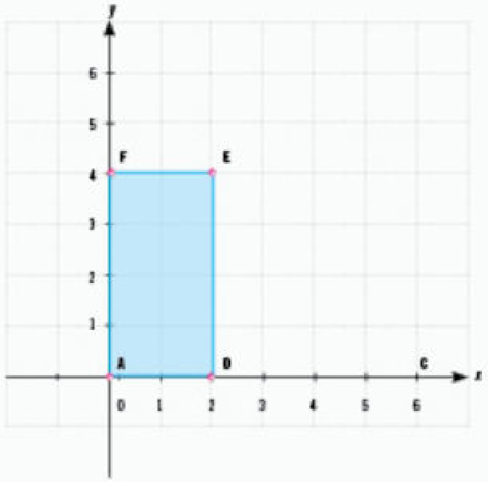
4. Traza una perpendicular al punto D con la herramienta **Recta perpendicular** sobre $\overline{AC}$ y marca el punto de intersección E con $\overline{BC}$.



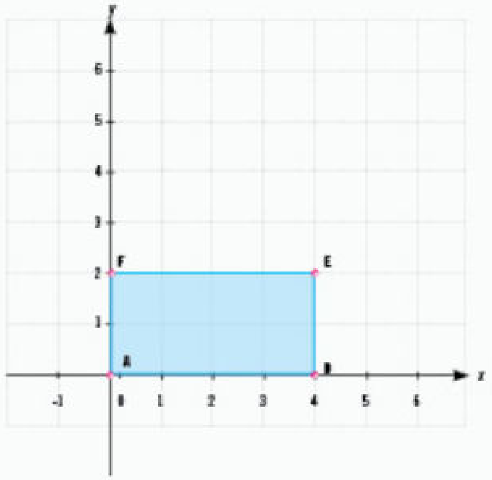
5. Con la herramienta **Recta perpendicular**, traza una recta perpendicular al punto E sobre el segmento AB. Marca el punto F de intersección con $\overline{AB}$.



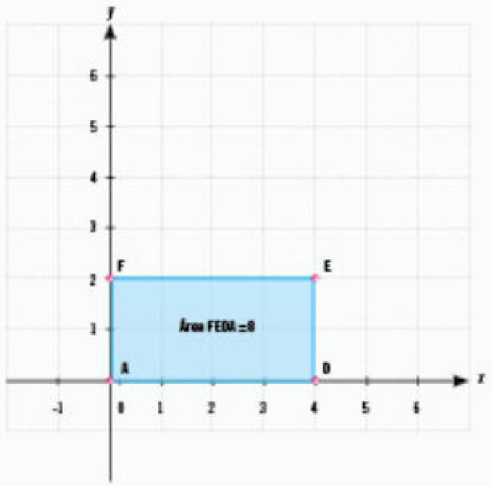
6. Con la herramienta **Polígono**, traza el rectángulo FEDA y oculta los trazos auxiliares usando la herramienta **Expone / Oculta**.



7. Mueve el punto D, de izquierda a derecha.
   - ¿Qué sucede?
   - ¿Qué varía en la figura al mover el punto D?
   - ¿Qué valores puede tomar $\overline{AD}$?
   - ¿Qué valores puede tomar $\overline{AF}$?



8. Calcula el área del rectángulo usando la herramienta **Área** haciendo clic sobre el rectángulo. Mueve el punto D, de izquierda a derecha.
   - ¿Qué sucede?
   - ¿Qué varía en la figura al mover el punto D?
   - ¿Puedes encontrar dos rectángulos con la misma área?

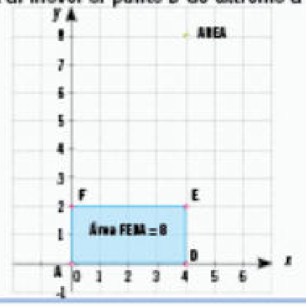


9. En la barra de entrada escribe lo siguiente.

AREA=(x(D),polígono1)

Este comando crea un punto nuevo llamado AREA y que tiene como coordenadas:
   - *x*: la coordenada en *x* del punto D.
   - *y*: el área del rectángulo FEDA.

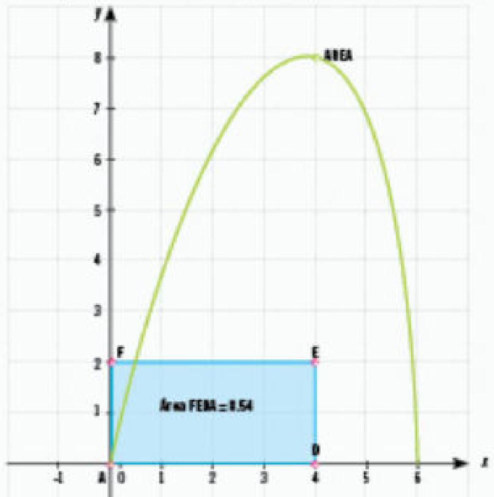
Mueve nuevamente el punto D.
   - ¿Cómo se mueve el punto AREA?
   - ¿De qué valor depende el valor del área?
   - ¿Puedes visualizar la curva que describe el punto AREA al mover el punto D de extremo a extremo?



10. Vamos a mostrar la forma de esta curva usando la herramienta **Lugar Geométrico**.

Haz clic sobre el punto AREA y después sobre el punto D.

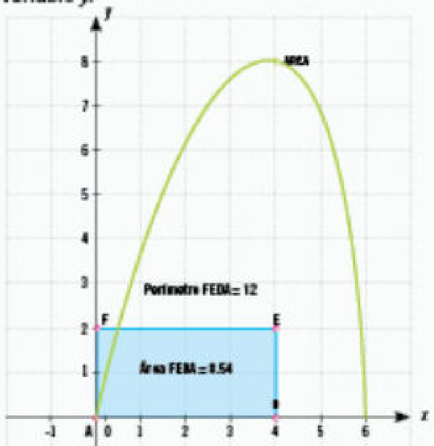
Explora la construcción y determina: ¿cuál es la mayor área que puede tener el rectángulo? y ¿a qué punto de la curva corresponde este valor?



11. Con la herramienta **Distancia o Longitud**, haz clic sobre el rectángulo para obtener su perímetro.

Mueve el punto D y contesta: ¿cómo varía el perímetro del rectángulo?

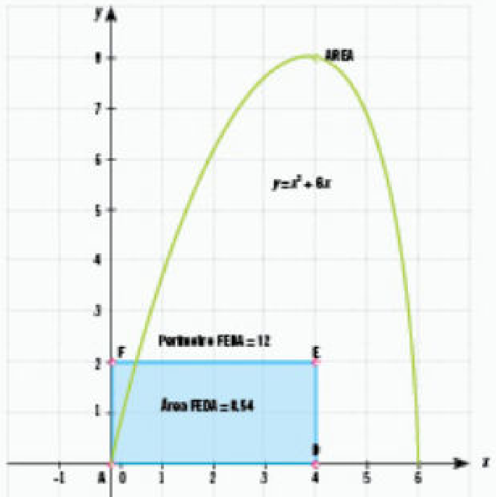
Conociendo el perímetro ya puedes deducir una expresión que modele el área del rectángulo. Considera $\overline{AD}$ como la variable *x* y $\overline{AF}$ como la variable *y*.



12. Confirma la expresión que obtuviste, es decir, tu modelo matemático, escribiéndolo en la barra de entrada y pulsando la tecla **Enter** del teclado.

A este tipo de curvas se le conoce como parábolas y corresponden a la representación gráfica de expresiones del tipo:

$$ax^2 + bx + c \text{ con } a \neq 0$$

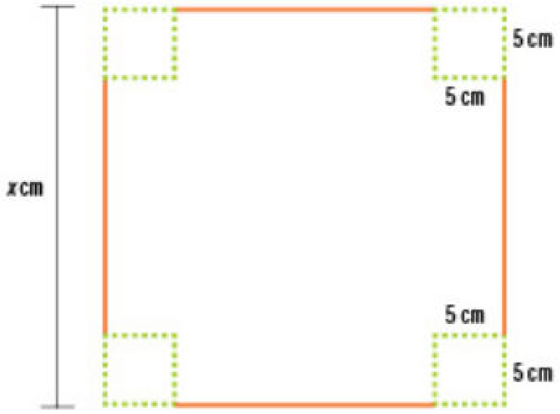


Situaciones que se resuelven usando la factorización

Un fabricante de cajas de cartón desea diseñar una caja sin tapa, usando una pieza cuadrada de cartón que tenga un volumen de 320 cm³. Para su construcción recorta en cada una de las esquinas del cartón un pequeño cuadrado de 5 cm de lado, como se ilustra en la imagen.

HISTORIA DE LAS PALABRAS

La palabra "parábola" está formada por "*para*" que significa "al margen" y "*bolé*" que significa "arrojar". Apolonio de Perga (hacia 220 a.n.e.), en la proposición 11 del libro I de *Las Cónicas*, llama parábolas a las curvas que desde entonces se conocen con ese nombre.



Con la información, en tu cuaderno, resuelve lo que se pide.

1. Considerando que las pestañas se doblarán hacia arriba para dar forma a la caja, identifica cuál será la base de la caja y cuáles serán sus lados.
2. Escribe las expresiones matemáticas que representan la base y la altura de cada lado de la caja.
3. Escribe la expresión algebraica que representa el área de la base de la caja.

A=____________________

a. ¿Cuál es la ecuación que representa el volumen de la caja como el producto de tres factores?

PARA SABER MÁS

Recuerda que una suma algebraica lo mismo puede ser una suma que una resta aritmética, y que el resultado puede ser positivo o negativo.

$$+5-3=+2$$
$$-5+3=-2$$
$$+5+3=+8$$
$$-5-3=-8$$

4. Si el volumen es de 320 cm³, ¿cuál es la ecuación que se obtiene?, ¿cuál es la ecuación que representa el volumen de la caja como el producto de tres factores?
5. Para resolver la ecuación es necesario simplificarla e igualarla a 0. Escribe la ecuación que se obtiene.
6. Para facilitar la resolución por factorización, el coeficiente de x^2 debe ser 1. En la ecuación que escribiste, ¿cuál es el coeficiente de x^2? ¿Qué operaciones debes realizar para lograr que dicho coeficiente sea 1?

7. Para factorizar la ecuación anterior encuentra dos números que al multiplicarlos obtengas 36 y sumados algebraicamente obtengas –20, escríbelos en los paréntesis.

$$(x \qquad)(x \qquad)=0$$

8. Ahora se requiere determinar los valores de x que sustituidos en la expresión den por resultado 0.
   a. ¿Qué valor de x hace que el primer factor sea 0? Plantea una ecuación lineal para averiguarlo.
   b. ¿Qué valor de x hace que el segundo factor sea 0? Plantea una ecuación lineal para averiguarlo.
9. Comprueba que los valores de la variable realmente satisfacen la expresión obtenida.
   a. ¿Cuántos valores de x satisfacen la ecuación?, ¿son válidos ambos resultados para el problema en particular?
   b. ¿Cuáles son las medidas de cada lado de la caja, cuyo volumen es de 320 cm³?

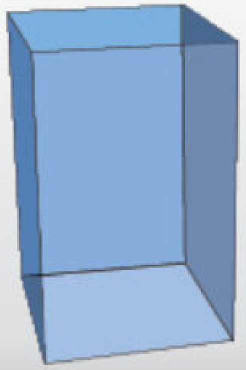
PARA SABER MÁS

Los números primos (2, 3, 5, 7, 13… 41…) no pueden descomponerse en factores. Del mismo modo, no todas las expresiones algebraicas pueden descomponerse como el producto de factores; por ejemplo $x+y-1=0$ no puede factorizarse.

Con ayuda de tu profesor, comparte tus repuestas con algún compañero. Si hay diferencias en sus resultados, analicen a qué se debió y efectúen las correcciones necesarias.

Reto Lee con atención y contesta las preguntas.

Una caja tiene forma de prisma rectangular, como se muestra en la imagen. La longitud del largo de su base mide 12 cm más que su ancho. Si el área de la base es de 540 cm² y la altura de la caja 60 cm, determina lo siguiente.



1. ¿Cuánto mide el ancho de la base?
2. ¿Cuánto mide el largo de la base?
3. Si el valor del área de la base fuera ahora 748 cm², ¿cuánto mediría cada lado de la caja?

LECTURALIA

¿Qué tienen en común un apretón de manos, un enjambre de abejas y el matemático Euler? Si deseas comprobar si esta pregunta carece o no de sentido, la respuesta a esta cuestión y mucho más, la podrás encontrar en el capítulo 6 del libro *Álgebra recreativa*, de Yakov Perelman.

Disponible en http://www.librosmaravillosos.com/algebrarecreativa/ (consultado el 17 de marzo de 2016).

PARA RESOLVER

Lee los planteamientos y realiza lo que se te pide.

1. Resuelve cada una de las ecuaciones por medio de la factorización.
   a. $x^2+2x+1=0$
   b. $x^2+x-2=0$
   c. $-x^2+15x+700=0$
   d. $x^2+15x-100=0$

2. José quiere cercar una superficie rectangular de terreno de 9 000 m² para proteger la siembra de los animales. Los planos indican que el perímetro del terreno es de 380 m.
   a. Escribe una variable que represente la base y otra para representar la altura del rectángulo.
   base = ____________, altura = ____________
   b. Escribe en tu cuaderno una expresión matemática que relacione el área conocida (A = 9 000 m²) con las variables que propusiste en el punto anterior.
   c. Expresa el perímetro del terreno (P = 380 m) usando las variables que asignaste para la base y la altura.
   d. ¿Cómo puedes relacionar las expresiones de los puntos anteriores para establecer una expresión única que modele el problema planteado?
   e. Resuelve la ecuación que obtuviste, descomponiendo en factores.
   f. ¿Cuáles son las longitudes de largo y ancho del terreno que José debe cercar?

Con ayuda del profesor, compara tus resultados con el resto del grupo. En caso de haber diferencias, analicen cuál es el procedimiento correcto y efectúen las correcciones necesarias.

PARA TERMINAR

Con la supervisión de su profesor, reúnete en pareja para analizar el planteamiento siguiente.

Una agencia de viajes desea promocionar un nuevo destino turístico por medio de una oferta especial de fin de año. Si 200 personas deciden viajar con ellos, el costo del transporte por persona será de 350 dólares. Sin embargo, si más de 200 personas participan en el viaje, entonces el costo por pasajero se reduce en 1 dólar por cada pasajero extra.

1. Asuman que, en efecto, viajan más de 200 personas y denoten al número de pasajeros extra con la literal x.
2. Realicen lo que se indica y contesten las preguntas.
   a. Escriban en su cuaderno una expresión matemática que represente el número total de pasajeros.
   b. Escriban una expresión matemática que represente el costo del transporte de cada viajero. ¿Cuál fue el costo del viaje por persona?
   c. Si la compañía de viajes recaudó la cantidad de 45000 dólares, ¿cuántas personas realizaron el viaje?

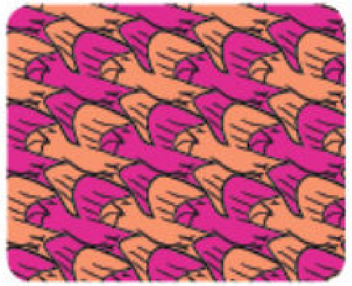
Con la guía de su profesor, comparen sus respuestas con otras parejas. Si hay diferencias en sus resultados, revisen sus procedimientos y efectúen las correcciones que sean necesarias.

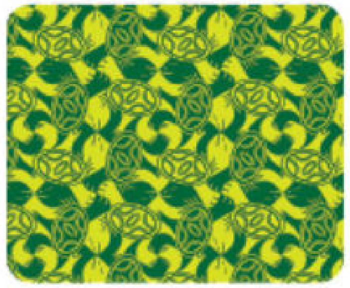
LECCIÓN 2

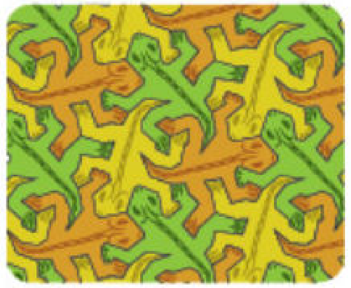
ANÁLISIS DE LAS PROPIEDADES DE LA ROTACIÓN Y DE LA TRASLACIÓN DE FIGURAS

La geometría es una rama de las matemáticas que destaca por la versatilidad de sus aplicaciones. Algunas de las disciplinas íntimamente ligadas con su desarrollo son la arquitectura, el diseño y la pintura artística. En las imágenes se pueden observar algunas propiedades geométricas. ¿Puedes inferir cuáles son?


a.


b.


c.


d.

PARA COMENZAR

Lee con atención y contesta las preguntas en tu cuaderno.

1. Observa los grabados representados en las imágenes de arriba.
   a. ¿Qué característica común observas en ellas?
2. Ahora centra tu atención sólo en las imágenes a y b.
   a. ¿Qué característica común observas entre las figuras?
   b. ¿Se conserva o se altera el tamaño de cada figura?
   c. ¿Puedes encontrar algún patrón que sigan las figuras?, ¿cuál es? Descríbelo.
3. Observa ahora las imágenes c y d.
   a. ¿Qué característica común observas entre las figuras?
   b. ¿Se conserva o se altera el tamaño de cada figura?
   c. ¿Siguen algún patrón las figuras?, ¿cuál es? Descríbelo.

HISTORIA DE LAS PALABRAS

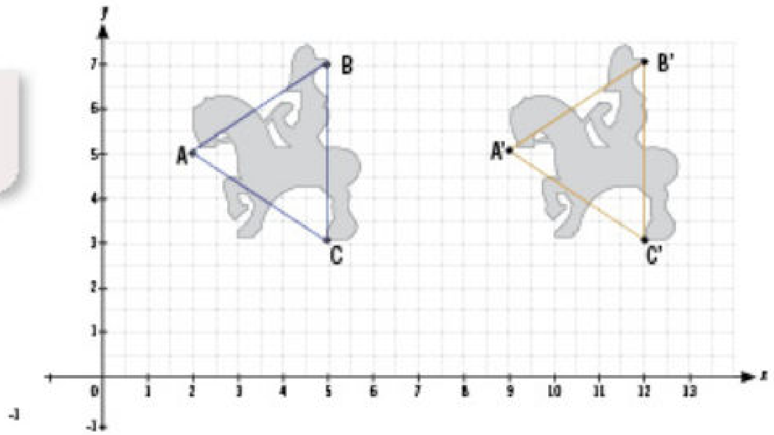
La palabra "tesela" viene del latín "*tessella*", que significa "cubito" o "azulejo" y que a su vez es diminutivo de "*tessera*", "cubo de piedra o madera". Esta palabra latina proviene del griego "*tesseris*", que significa "cuatro". Una tesela es cada una de las piezas con que se forma un mosaico.

Con ayuda de tu profesor, comparte tus repuestas con algún compañero. ¿Sus respuestas son semejantes o difieren?, ¿por qué?

Traslación de coordenadas

Reúnete con un compañero, observen la imagen y realicen lo que se pide.

REFLEXIONA
¿Qué son las figuras congruentes?
¿Qué características tienen estas figuras?



1. Midan con una regla graduada los lados del triángulo ABC y los del triángulo A'B'C', ¿cómo son entre sí $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$; $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$; $\overline{AC}$ y $\overline{A'C'}$?
   a. Con ayuda de sus transportadores, determinen cuánto miden los ángulos A y A'; B y B'; C y C'. ¿Cómo son entre sí dichos ángulos?
   b. ¿Los triángulos ABC y A'B'C' son congruentes o semejantes? Expliquen por qué.
   c. Calculen las áreas de ambos triángulos, ¿cómo son entre sí?

2. Trasladen las coordenadas.
   a. Localicen las coordenadas de los vértices de ambos triángulos y escríbanlas en la tabla siguiente.

Coordenadas de la figura original	Coordenadas de la figura trasladada
A(,)	A'(,)
B(,)	B'(,)
C(,)	C'(,)

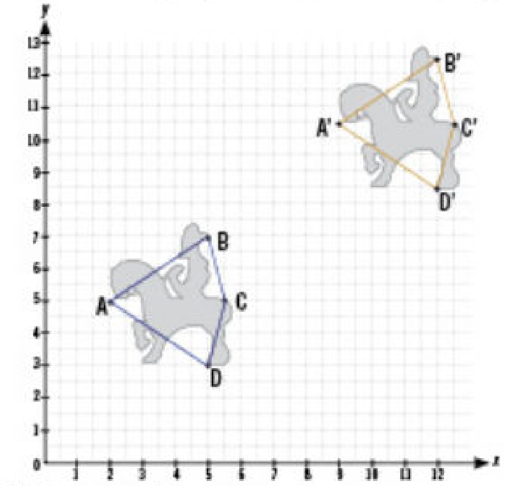
   b. ¿Observan algún patrón? Descríbanlo con sus propias palabras.

3. Con base en lo anterior, completen la expresión que les permita obtener las coordenadas de un punto de la figura a partir de las coordenadas de la figura original.

Coordenadas de la figura original	Coordenadas de la figura trasladada
(x, y)	$(x, y) \rightarrow (x + \square, y + \square)$

   a. ¿Qué cambió cuando la figura geométrica fue trasladada?, ¿qué permaneció constante?

4. Observen la imagen y con la ayuda de su regla y transportador respondan lo que se indica.



Siluetas y coordenadas.

   a. ¿Cómo son entre sí los lados y ángulos homólogos de los cuadriláteros ABCD y A'B'C'D'?
   b. Calculen las áreas de cada cuadrilátero, ¿cómo son entre sí?
   c. ¿Los cuadriláteros son congruentes o semejantes? Expliquen por qué.

5. Trasladen las coordenadas.
   a. Localicen las coordenadas de los vértices de ambos cuadriláteros y escríbanlas en la tabla siguiente.

Coordenadas de la figura original	Coordenadas de la figura trasladada
A(,)	A'(,)
B(,)	B'(,)
C(,)	C'(,)
D(,)	D'(,)

   b. ¿Observas algún patrón?
   c. ¿Cuántas unidades está trasladada la abscisa *x* del punto A' respeto a la coordenada abscisa *x* del punto A?
   d. ¿Cuántas unidades está trasladada la ordenada *y* del punto A' respecto a la coordenada ordenada *y* del punto A?

6. Con base en lo anterior, completen la expresión matemática que permite obtener las coordenadas de un punto de la figura trasladada a partir de las coordenadas de la figura original.
   a. ¿Qué cambió cuando la figura fue trasladada?, ¿qué permaneció constante?

Coordenadas de la figura original	Coordenadas de la figura trasladada
(x, y)	$(x, y) \rightarrow (\square + \square, \square + \square)$

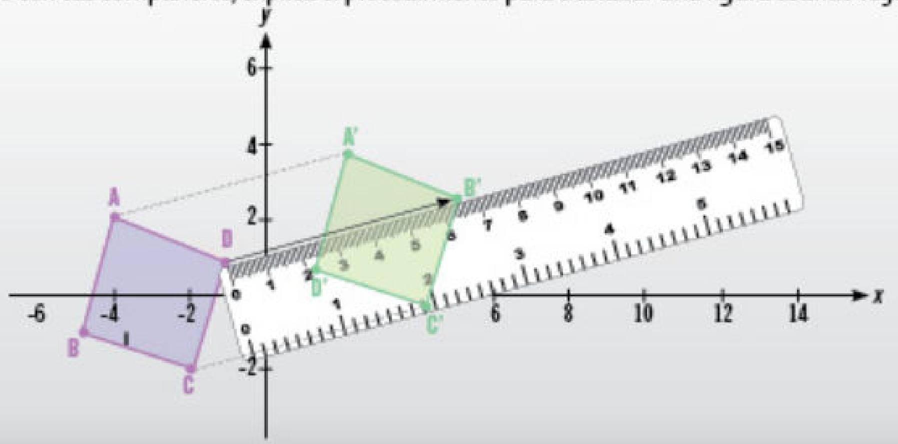
   b. ¿Qué efectos tienen estos cambios en la figura? Midan y comparen los lados y ángulos de los cuadriláteros ABCD y A'B'C'D'.

7. Con la guía de su profesor, obtengan una conclusión sobre los efectos que tiene sobre la figura trasladarla de una posición a otra.

Reto

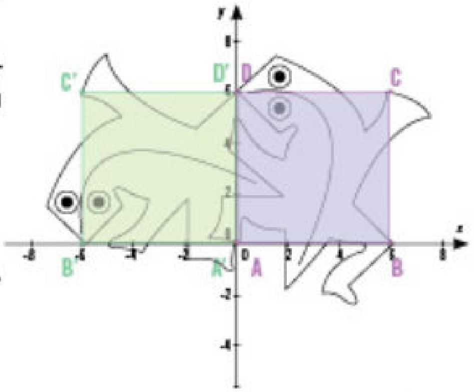
La figura siguiente ilustra cómo trasladar una figura geométrica.

Junto con tus compañeros, explica el procedimiento para trasladar una figura usando regla.



Rotación de coordenadas

Con la guía de tu profesor, reúnete con un compañero y realicen la actividad siguiente en su cuaderno.



1. Analiza la imagen y utiliza la regla y el transportador para responder las preguntas que aparecen a continuación.
   a. ¿Cómo son entre sí las medidas de los segmentos AB y A'B'; BC y B'C'; CD y C'D'; DA y D'A'?
   b. ¿Cuánto miden los ángulos de los cuadriláteros ABCD y A'B'C'D'?, ¿cómo son entre sí?
   c. ¿Sobre qué punto rotó el cuadrilátero ABCD?
   d. Tomando como referencia el origen del plano cartesiano y el eje x, ¿cuántos grados gira el cuadrilátero ABCD de manera que coincida con el cuadrilátero A'B'C'D'?
   e. ¿En qué sentido rotó el cuadrilátero, horario o antihorario?

2. Con base en la información de la imagen, completen la tabla con las coordenadas según corresponda.

Coordenadas de la figura original	Coordenadas de la figura rotada
A(,)	A'(,)
B(,)	B'(,)
C(,)	C'(,)
D(,)	D'(,)

3. Considerando lo anterior, completen la expresión matemática que permite obtener las coordenadas de un punto de la figura rotada a partir de las coordenadas de la figura original.

Coordenadas de la figura original	Coordenadas de la figura rotada
(x, y)	$(x, y) \rightarrow (\boxed{}, \boxed{})$

4. Deduzcan las expresiones matemáticas que les permitan conocer las coordenadas de un punto P(x, y) después de rotarlo.

Rotación en el sentido opuesto a las manecillas del reloj	Coordenadas del punto original	Coordenadas del punto rotado
90°	(x, y)	$(x, y) \rightarrow (\boxed{}, \boxed{})$
180°		
270°		
360°		

5. Con la guía de su profesor, obtengan una conclusión sobre los efectos que ocasiona en las medidas de una figura el hecho de rotarla.

HISTORIA DE LAS PALABRAS

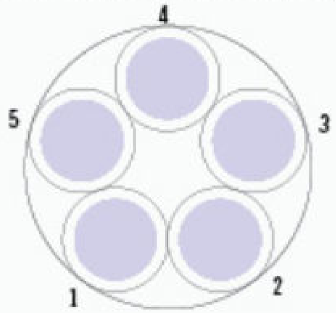
La palabra "vector", proviene del latín "*vectoris*" y a su vez de "*veho*" que significa "el que lleva o conduce, el que transporta". En matemáticas y física se suele representar con una flecha sobre la letra que denota al vector; por ejemplo, la velocidad en física se expresa v, mientras que geométricamente se representa con una flecha.

Tarea en casa

Lee con atención y contesta las preguntas.

Un estéreo tiene capacidad de almacenar hasta cinco discos compactos para su reproducción. El mecanismo de selección sólo permite girar la charola en sentido contrario a las manecillas del reloj.

1. Si el lector se encuentra reproduciendo el disco uno, contesta.
   a. ¿Cuántos grados tendrá que girar la charola para reproducir el disco tres?
   b. ¿Cuántos grados tendrá que girar la charola para reproducir el disco cinco?



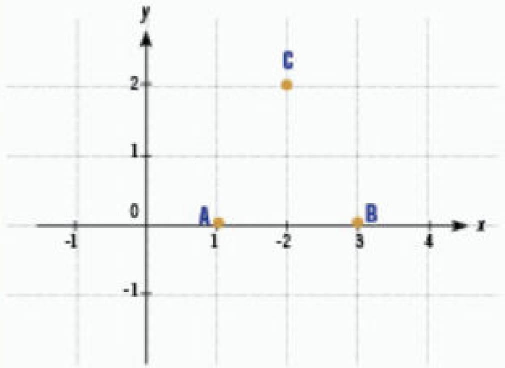
PARA SABER MÁS

La condición para realizar una traslación consiste en asegurar que la figura a trasladar conserve siempre todas sus dimensiones, tanto lineales como angulares, y que el ángulo con respecto a la horizontal tampoco cambie. La condición para realizar una rotación consiste en elegir un punto que habrá de fungir como centro de rotación y determinar un ángulo de giro. Cada vértice de la figura deberá ubicarse en su nueva posición conservando el mismo ángulo de giro empleado para los demás vértices.

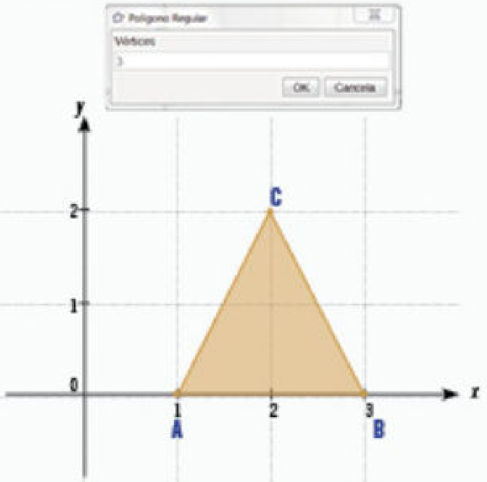
TIC

Realiza la siguiente actividad, utilizando el *software* de uso libre para geometría dinámica GeoGebra.

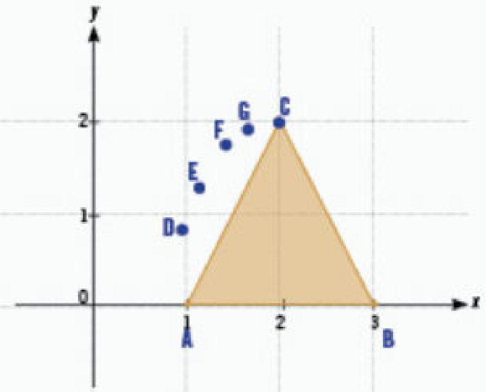
1. Traza dos puntos usando la herramienta **Nuevo Punto** . Haz clic en la pantalla gráfica en un punto más y cierra la figura para formar el triángulo.



2. Traza un triángulo equilátero usando la herramienta **Polígono regular** . Haz clic sobre el punto A y después sobre el B. A continuación se mostrará un diálogo preguntando el número de vértices del polígono. Escribe el número 3 en el número de vértices y haz clic en el botón **Aceptar**.

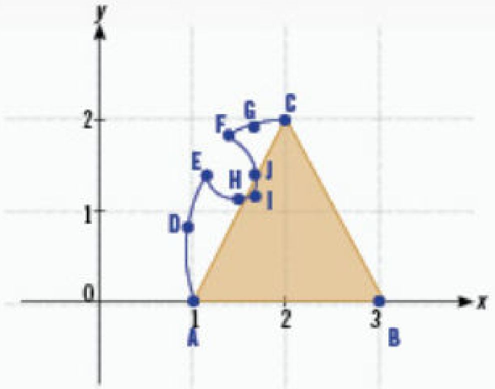


3. Usando la herramienta **Nuevo Punto** , traza los puntos D, E, F y G de manera similar a la ilustrada.



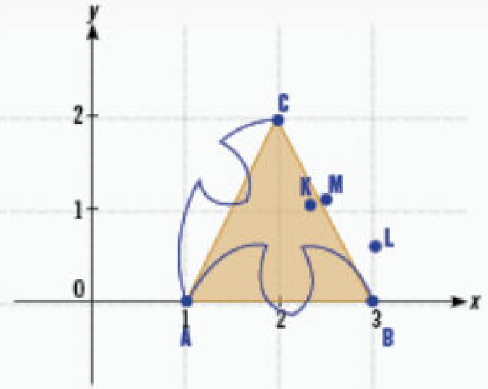
4. Con la herramienta **Arco de Circunferencia dados Tres de sus Puntos** , traza los arcos ADE y CGF.

5. De manera similar al paso anterior, traza los puntos H, I y J y traza los arcos EHI e IJF.

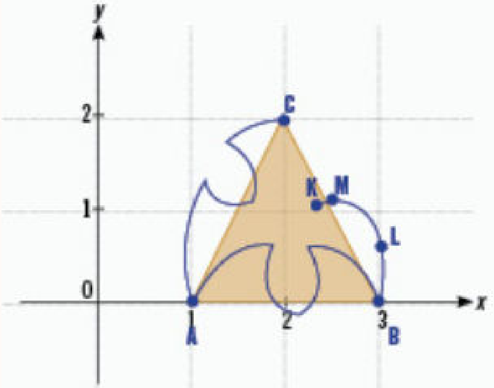


6. Usando la herramienta **Expone / Oculta objeto** oculta los puntos E, F, H, I, J y G. Selecciona la herramienta **Rota Objeto en torno a Punto, el Ángulo indicado.** Rota cada uno de los arcos que trazaste en torno al punto A. ¿Cuántos grados y en qué sentido debes rotar cada uno de los arcos para obtener la figura mostrada?

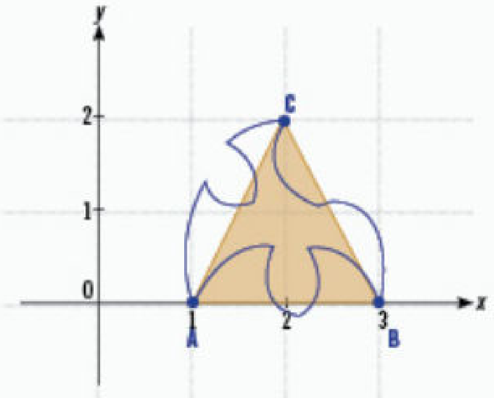
7. Traza el punto medio de $\overline{BC}$ usando la herramienta **Punto medio o centro** . Usando la herramienta **Nuevo punto**, traza los puntos M y L.



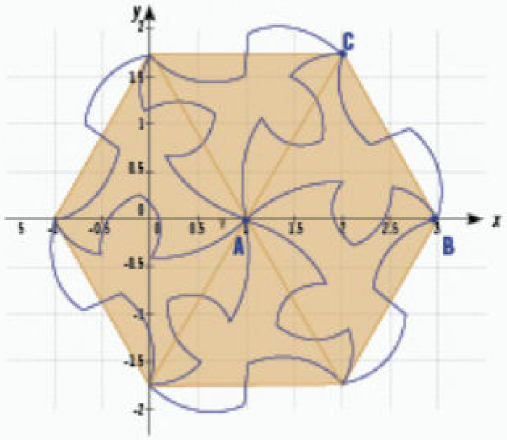
8. Une los puntos B, L y M con la herramienta **Arco de Circunferencia dados Tres de sus Puntos** , para formar el arco BLM. Une los puntos M y K usando la herramienta **Segmento entre Dos Puntos** para trazar el segmento MK. Oculta los puntos L y M.



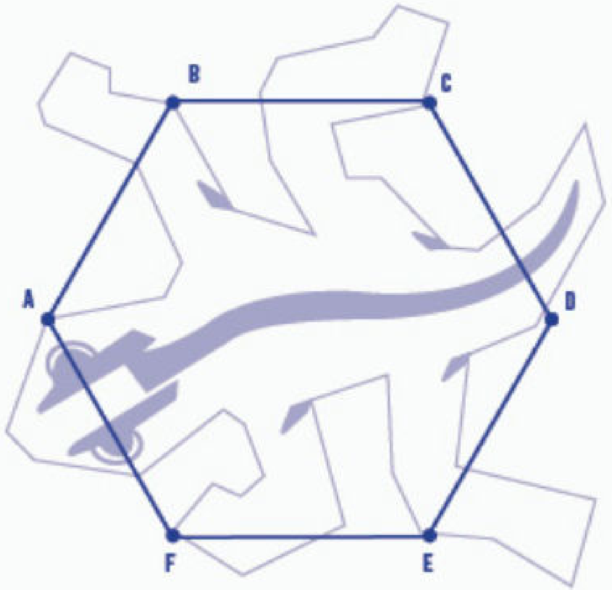
9. Con ayuda de la herramienta **Rota Objeto en torno a Punto, el Ángulo indicado**, rota el arco BLM y $\overline{MK}$ en torno al punto K para obtener la figura que se muestra. ¿Cuántos grados y en qué sentido es necesario rotar el arco y el segmento de recta?



10. Usa la herramienta **Rota Objeto en torno a Punto, el Ángulo indicado** para rotar cada arco y segmento que compone a la figura para construir una sección de teselado. ¿Cuántos grados debes rotar cada arco y segmento de la figura?, ¿en qué sentido? Explica por qué.

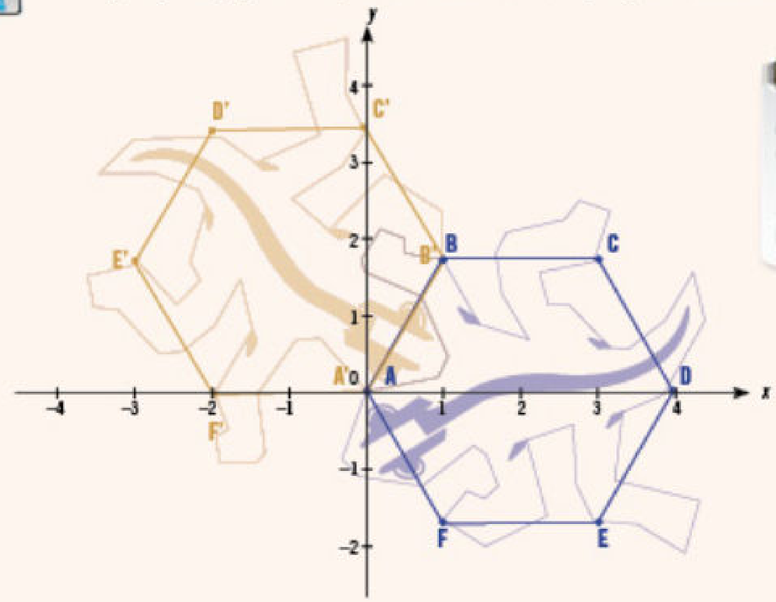


11. La figura del lagarto se dibujó usando una técnica similar a la del pez volador que ilustramos en los pasos anteriores. ¿Puedes ver el patrón? Intenta trazar en GeoGebra una figura parecida y obtener una sección de su teselado. Comparte con tus compañeros tu diseño.



PARA RESOLVER

Con la guía y el apoyo de tu profesor, analiza la imagen y contesta las preguntas.



LECTURALIA

Averigua algunas de las técnicas de M. C. Escher y conoce sus sorprendentes obras en el libro *El espejo mágico*, del matemático Bruno Ernst.

1. Observa el hexágono ABCDEF. ¿Cómo está relacionado con el hexágono A'B'C'D'E'F'?
   a. ¿Qué efectos tienen estos cambios en la figura? Mide y compara los lados y ángulos de los dos hexágonos.

2. Tomando como referencia el origen del plano cartesiano y el eje *x*, responde.
   a. ¿Cuántos grados está rotado el hexágono amarillo respecto al hexágono azul? Verifica tu conjetura utilizando un transportador.

Con la guía de tu profesor, obtén una conclusión general con el resto de tus compañeros acerca de lo que sucede cuando una figura geométrica se rota: ¿cambia su forma o se mantiene?, ¿cambian sus medidas o se mantienen?, ¿cambian sus ángulos internos o se mantienen?

AFORISMOS

"A menudo me encuentro más cerca de los matemáticos que de mis colegas los artistas."

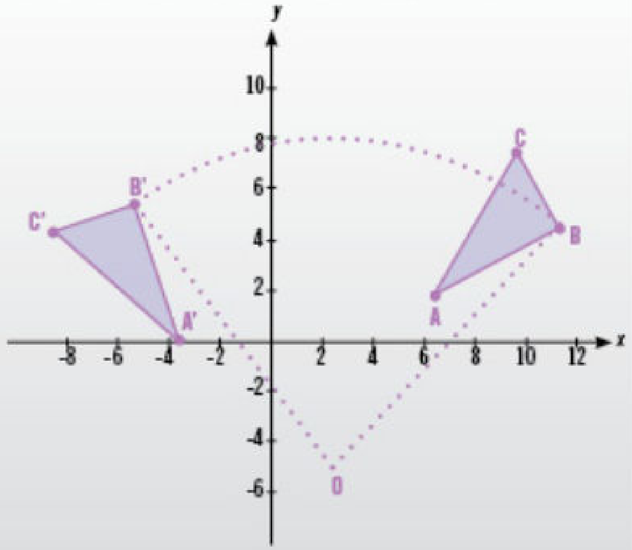
M. C. Escher (1898-1972), pintor holandés.

¿Qué opinas sobre las palabras de Escher? ¿De qué modo crees que las matemáticas influyeron en su trabajo?

Reto

La imagen siguiente ilustra cómo rotar una figura geométrica.

1. Discute con tus compañeros y establezcan un procedimiento para rotar una figura usando regla, transportador y compás.
2. ¿Qué función tiene el punto O?

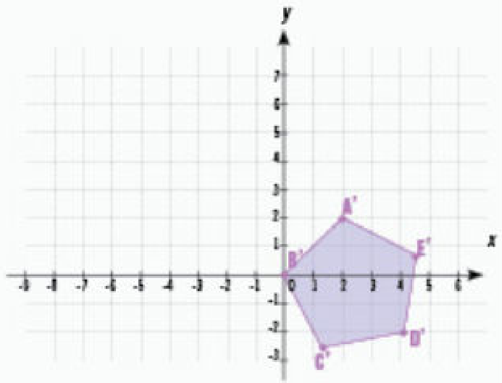


Tarea en casa

Lee con atención y realiza lo que se indica en tu cuaderno.

1. Traza el ΔABC con vértices A(–1, 1), B(1, 3) y C(5, 2). Sea $\Delta A'B'C'$ la traslación del ΔABC y el $\Delta A''B''C''$ la traslación del $\Delta A'B'C'$.
   a. Traza el triángulo A'B'C' usando la traslación $(x, y) \rightarrow (x + 2, y - 3)$
   b. Traza el triángulo A''B''C'' usando la traslación $(x, y) \rightarrow (x - 4, y - 2)$
   c. ¿Cómo podrías trasladar el ΔABC hasta $\Delta A''B''C''$ efectuando sólo una traslación?

2. En la figura se muestra el resultado de transformar un pentágono por medio de la traslación $(x, y) \rightarrow (x + 8, y - 1)$ y una rotación de 180° respecto al punto A'.
   a. Calcula las coordenadas de los puntos originales A, B, C, D y E.
   b. Traza el pentágono original.



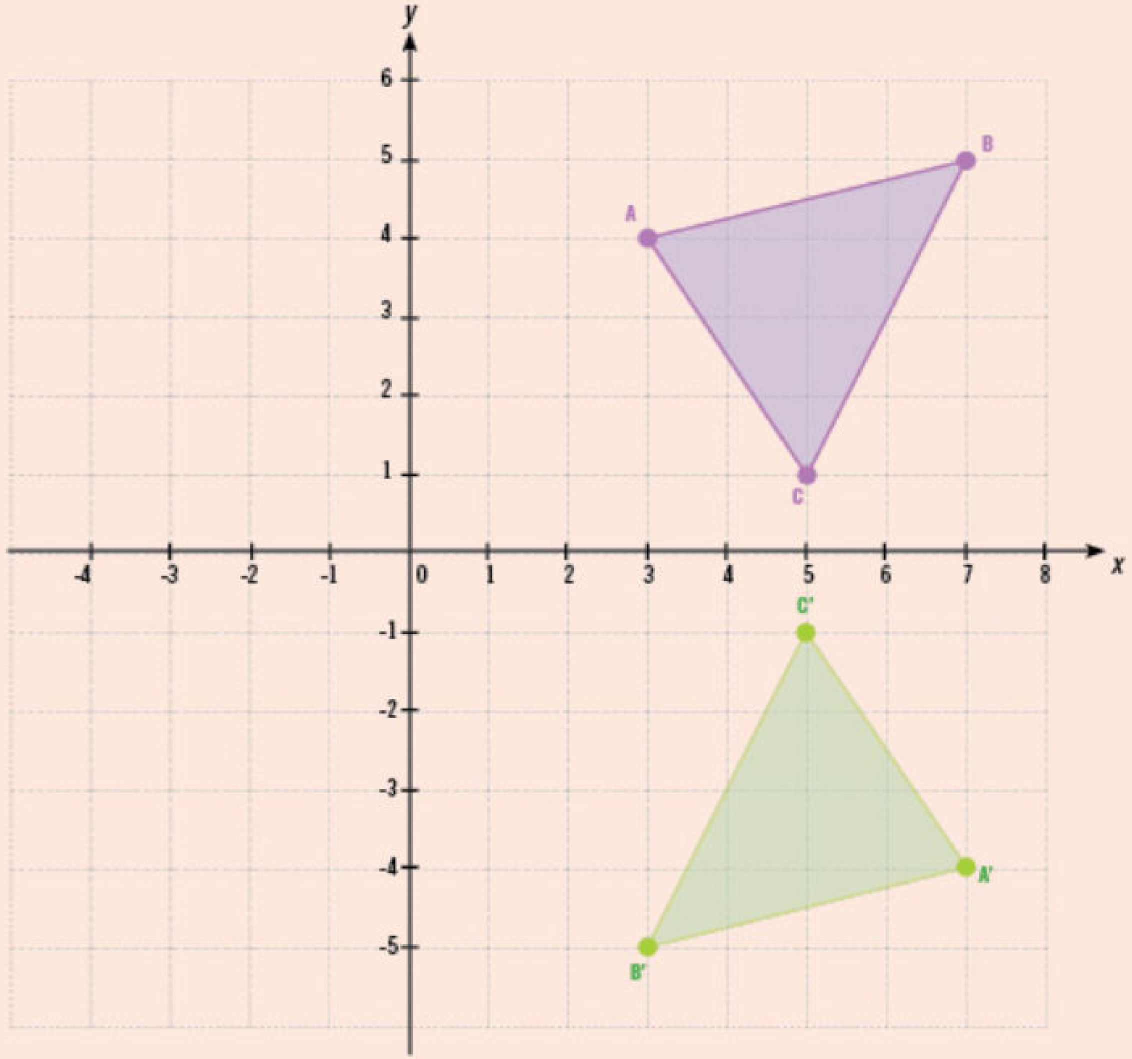
3. Una figura se traslada utilizando la transformación $(x, y) \rightarrow (x + 5, y - 2)$. Después se traslada mediante la transformación $(x, y) \rightarrow (x + 1, y - 4)$. Si inviertes el orden de las traslaciones, ¿la figura final es la misma? Justifica tu respuesta.

PARA TERMINAR

El triángulo ABC se ha transformado aplicando en cierto orden una traslación y una rotación respecto al origen, dando como resultado el triángulo A'B'C'.

1. Determina y contesta las preguntas en tu cuaderno.
   a. ¿Cuál fue la traslación efectuada?
   b. ¿Cuál fue la rotación efectuada?
   c. ¿En qué orden se pueden hacer las transformaciones?

Con la ayuda de tu profesor, compara tus respuestas con tus compañeros. Si hay diferencias en los resultados, revisen sus procedimientos y efectúen las correcciones que sean necesarias.



LECCIÓN 3

FORMA, ESPACIO Y MEDIDA

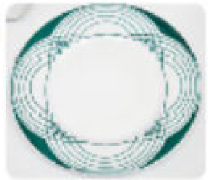
CONSTRUCCIÓN DE DISEÑOS QUE COMBINAN LA SIMETRÍA AXIAL Y CENTRAL, LA ROTACIÓN Y LA TRASLACIÓN DE FIGURAS

Los pintores, alfareros, diseñadores gráficos y arquitectos, entre otros artistas y profesionales, se apoyan frecuentemente en el uso de la geometría para realizar sus obras. Observa los diseños, ¿puedes encontrar algo en común entre ellos?

a. 

b. 

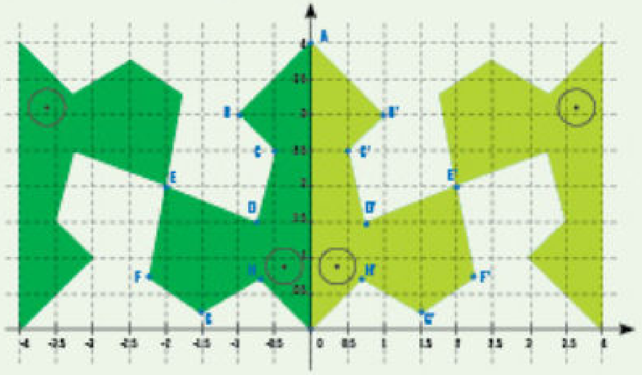
c. 

d. 

Diferentes diseños donde están implícitas ciertas propiedades geométricas.

PARA COMENZAR

Con la coordinación de tu profesor, reúnete con un compañero y realicen la actividad.



1. La imagen muestra un diseño basado en algunas de las técnicas desarrolladas por el pintor M. C. Escher.
2. Con ayuda de la figura, completen la tabla con las coordenadas de los puntos que se piden.
3. Observen las coordenadas de los puntos que acaban de localizar en el plano cartesiano.
   a. ¿Qué cambia entre las coordenadas de los puntos B y B', C y C', D y D', E y E', F y F', G y G', H y H'?
   b. ¿Observan algún patrón? Descríbanlo.

Coordenadas de los puntos originales	Coordenadas de los puntos reflejados
B(,)	B'(,)
C(,)	C'(,)
D(,)	D'(,)
E(,)	E'(,)
F(,)	F'(,)
G(,)	G'(,)
H(,)	H'(,)

Continúa...

4. Con base en sus observaciones, escriban una expresión matemática que les permita calcular las coordenadas del nuevo punto a partir de las coordenadas del punto original.
   a. ¿Qué efectos tienen estos cambios en la figura? Midan y comparen los lados y ángulos de los polígonos ABCDEFGH y A'B'C'D'E'F'G'H'.

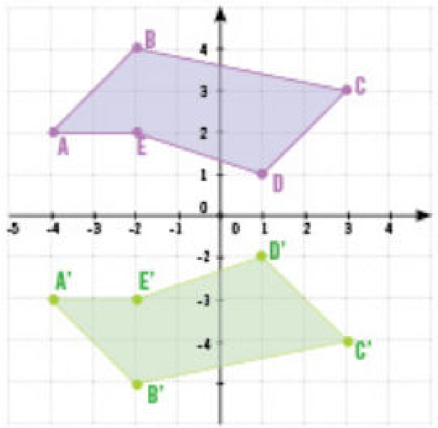
Punto original	Punto reflejado
(x, y)	$(x, y) \rightarrow$ (___ , ___)

5. Si el diseño estuviera impreso sobre una hoja, ¿cómo la doblarían para que cada vértice de los dos polígonos se empalmara uno sobre otro?
   a. ¿Qué tipo de simetría tiene este diseño?
   b. ¿A qué corresponde este doblez?

Con ayuda de su profesor, discutan sus respuestas con otras parejas. Si hay alguna diferencia en la tabla o en la expresión matemática, revisen a qué se debe y efectúen las correcciones necesarias.

Simetría axial

Analiza la imagen y resuelve lo que se plantea.



1. Con base en tus observaciones, escribe una expresión que permita calcular las coordenadas de los puntos del polígono A'B'C'D'E' a partir de conocer las coordenadas de los puntos A, B, C, D, E.

Punto original	Punto reflejado
(x, y)	$(x, y) \rightarrow$ (___ , ___)

PARA SABER MÁS

Si se tiene un punto A, entonces su imagen, es decir, el punto obtenido tras efectuar una traslación, rotación o reflexión, se denota como A'.

HISTORIA DE LAS PALABRAS

La palabra "isometría" proviene de los vocablos griegos "*iso*" que significa "igual" y "*metron*" que significa "medida". En matemáticas se suelen denominar "transformaciones isométricas" a las transformaciones que mantienen la forma y medida de figuras geométricas.

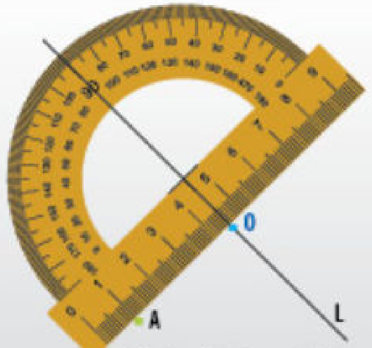
a. Si el diseño estuviera impreso sobre una hoja, ¿cómo la doblarías para que cada vértice de los dos polígonos se empalmara uno sobre otro?
b. ¿Este doblez a qué corresponde?

Con ayuda del profesor, discute tus respuestas con un compañero. Si descubren alguna diferencia, revisen a qué se debe y efectúen las correcciones necesarias.

Reto

En la imagen se refleja el punto A respecto a la recta L, utilizando un transportador con una regla.

1. Traza en tu cuaderno la imagen del punto A que se denominará A'.
   a. ¿Qué relación hay entre $\overline{AA'}$ y la recta L?
   b. ¿Cuál es el punto de rotación?
   c. ¿Cuántos grados y respecto a qué punto se debe rotar el punto A para llegar al punto A'?

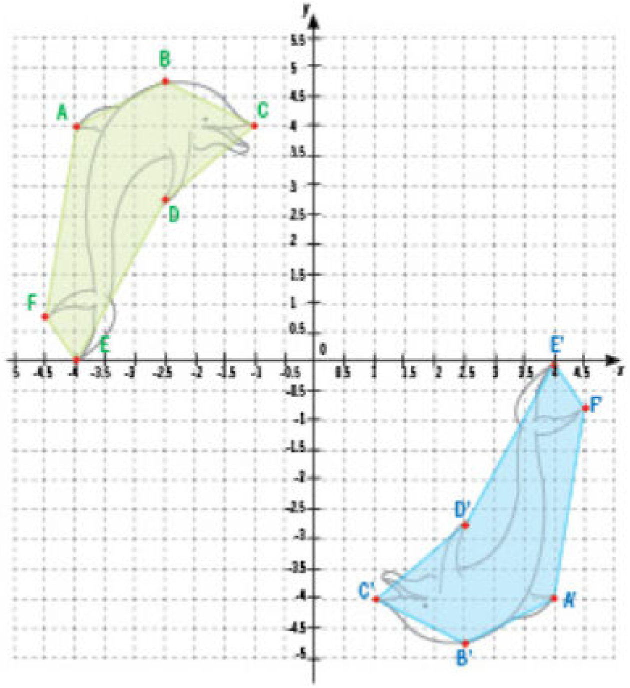


Uso de regla y transportador.

Simetría central

Con la coordinación de tu profesor, reúnete con un compañero y desarrollen la actividad.

1. Con ayuda de la imagen del plano cartesiano y la tabla de abajo, escriban las coordenadas de los vértices de los polígonos ABCDEF y A'B'C'D'E'F'.



Coordenadas de los puntos originales	Coordenadas de los puntos reflejados
A(,)	A'(,)

2. Observen las coordenadas de los puntos que acaban de localizar en el plano cartesiano.
   a. ¿Qué cambia entre las coordenadas de los puntos A, B, C, D, E, F y los puntos A', B', C', D', E' y F'?
   b. ¿Observan algún patrón? Descríbanlo.

3. Con base en sus observaciones, escriban la expresión matemática que les permita calcular las coordenadas del nuevo punto a partir de conocer las coordenadas del punto original.

Punto original	Punto reflejado
(x, y)	(x, y) → (☐ , ☐)

   a. ¿Qué efectos tienen estos cambios en la figura? Midan y comparen los lados y ángulos de los cuadriláteros A, B, C, D, E, F y A', B', C', D', E' y F'.

4. Con ayuda de una regla, midan las distancias siguientes y completen la tabla.

Distancia del punto original al origen	Distancia del punto reflejado al origen
d_{AO} =	$d_{A'O}$ =
d_{BO} =	$d_{B'O}$ =
d_{CO} =	$d_{C'O}$ =
d_{DO} =	$d_{D'O}$ =
d_{EO} =	$d_{E'O}$ =
d_{FO} =	$d_{F'O}$ =

   a. ¿Cómo son las distancias entre el punto original y el punto reflejado?
   b. ¿Con respecto a qué punto están reflejados los vértices del polígono ABCDEF?
   c. ¿Cómo doblarías la hoja de papel para que los dos polígonos ABCDEF y A'B'C' D'E'F' se superpusieran?, ¿cuántos dobleces son necesarios?
   d. ¿A qué reflexiones corresponden esos dobleces?

Con ayuda de su profesor, discutan sus respuestas con otras parejas. Si hay alguna diferencia en la tabla o en la expresión matemática, revisen a qué se debe y efectúen las correcciones necesarias.

PARA SABER MÁS

En física existe la llamada "ley de reflexión de la luz" que permite predecir el movimiento que un rayo de luz describirá al reflejarse en un espejo. Este principio es muy utilizado en los proyectores láser que despliegan efectos en eventos masivos. Estos proyectores cuentan con un emisor de luz láser y una serie de espejos que reflejan el haz de luz en diferentes direcciones a gran velocidad para crear el patrón de luz deseado.

LECTURALIA

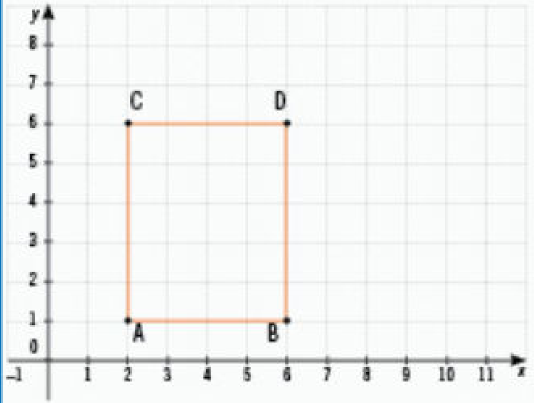
¿Geometría en un juego de billar? ¿Una bola inteligente? Las respuestas a estas interrogantes y otras más las encontrarás en el capítulo 10 del libro *Geometría recreativa*, de Yakov Perelman.

Disponible en http://www.librosmaravillosos.com/geometriarecreativa (consultado el 17 de marzo de 2016)

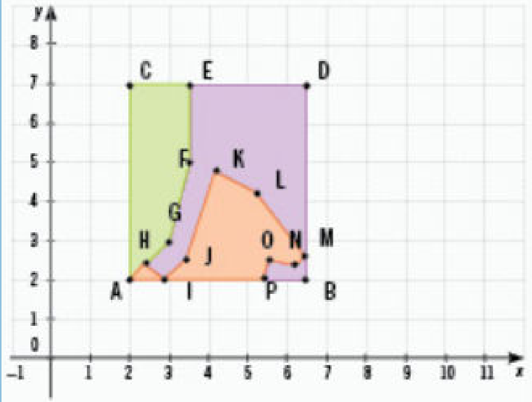
TIC

Desarrolla la actividad, utiliza el *software* de geometría dinámica GeoGebra.

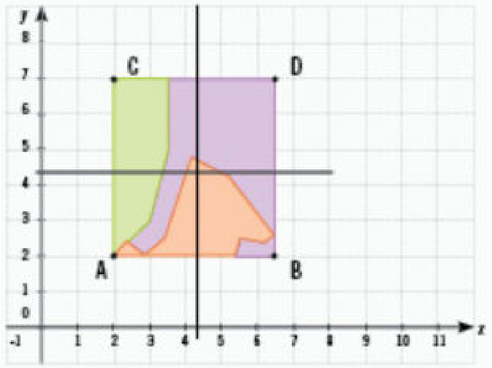
1. Traza los puntos A, B, C y D usando la herramienta **Nuevo punto**. Con la herramienta **Segmento entre Dos Puntos** forma el rectángulo ABCD.



2. Con ayuda de la herramienta **Punto nuevo**, traza de manera aproximada los puntos E, F, …, P. Usando la herramienta **Polígono**, traza los polígonos ACEFGH, AHIJKLMNOP y EFGHIJKLMD. Presta atención a la figura mostrada.

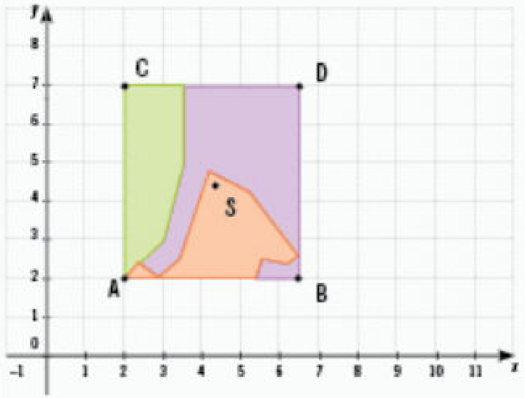


3. Oculta los puntos E, F, …, Q usando la herramienta **Expone / Oculta objeto** y haciendo clic sobre cada uno de los puntos. Encuentra el punto medio de AB y AC con la herramienta **Punto medio** y traza sus perpendiculares con la herramienta **Recta perpendicular**.



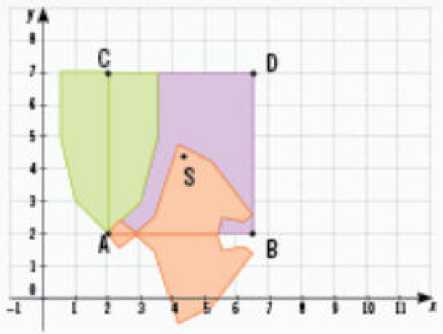
4. Marca el punto de intersección entre las dos rectas con la herramienta **Intersección entre Dos Objetos**. Éste es el centro del rectángulo ABCD.

Oculta las rectas utilizando la herramienta **Expone / Oculta objeto**, haciendo clic sobre ellas.

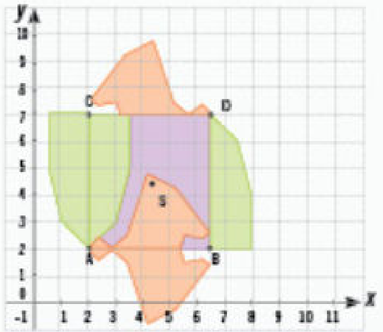


Continúa...

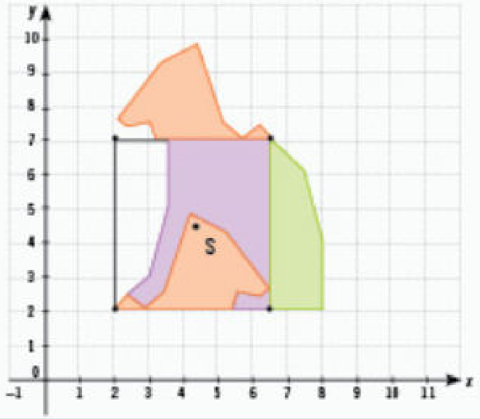
5. Refleja el polígono en verde respecto a $\overline{AC}$, usando la herramienta **Refleja objeto en recta**. De manera similar refleja el polígono en naranja respecto a $\overline{AB}$.



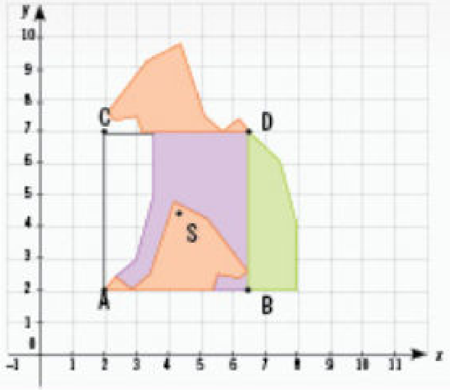
6. Aplica simetría central a las reflexiones de los polígonos AHIJKLMNOP y ACEFGH. Para esto utiliza la herramienta **Refleja objeto por un punto**. Da clic sobre el polígono a reflejar y después en el punto de reflexión. ¿Cuál es el punto de reflexión que genera la figura mostrada? Explica por qué.



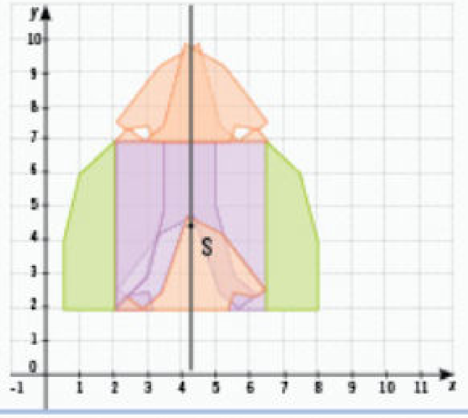
7. Oculta las dos primeras reflexiones y los puntos de tal manera que obtengas la figura que se muestra.



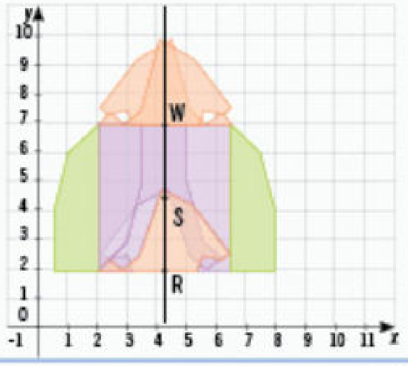
8. Usando la herramienta **Expone / Oculta objeto**, expón la recta perpendicular $\overline{AB}$.



9. ¿Qué transformación debes realizar para obtener la figura que se muestra? Utiliza el *software* para obtener ideas; compártelas con tus compañeros.

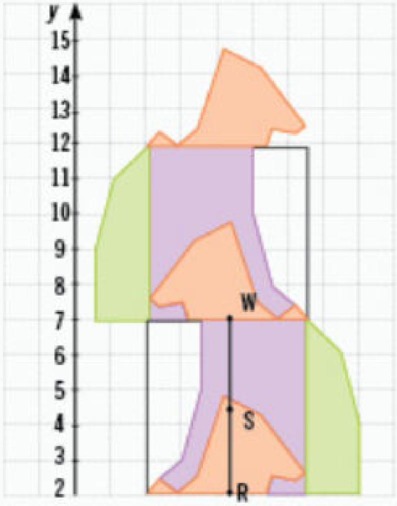


10. Marca los puntos R y W con la herramienta punto nuevo y dibuja un vector con la herramienta **Vector entre dos puntos**. Oculta la recta perpendicular $\overline{AB}$.

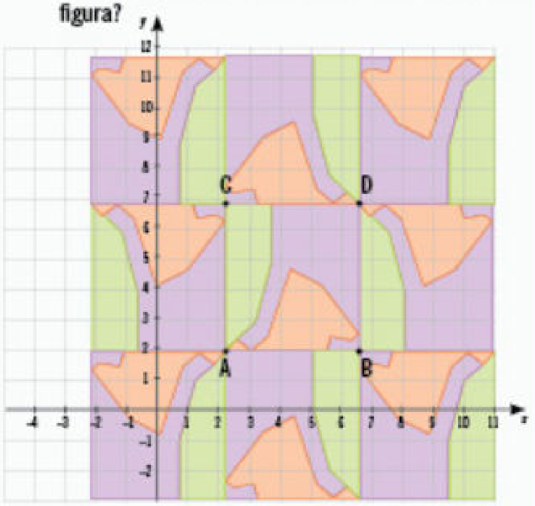


Continúa...

11. Algunos de los polígonos de la figura se trasladaron utilizando la herramienta **Traslada objeto por un vector**, haciendo clic sobre el polígono y después sobre el vector. ¿Cuáles de ellos fueron? Explora en tu construcción.



12. Usando la herramienta **Rota Objeto en torno a Punto, el Ángulo Indicado** completa el teselado. ¿En torno a qué puntos debes rotar cada polígono para lograr el diseño que se muestra en la figura?

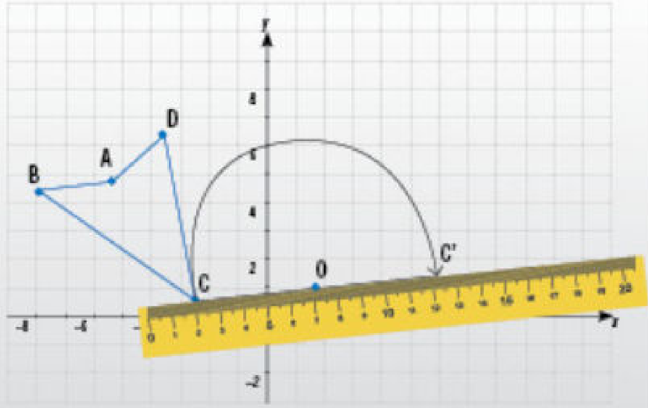


Reto

Analiza la figura y haz lo que se indica.

La imagen muestra cómo con una regla y un compás se puede trasladar una figura a través de un punto.

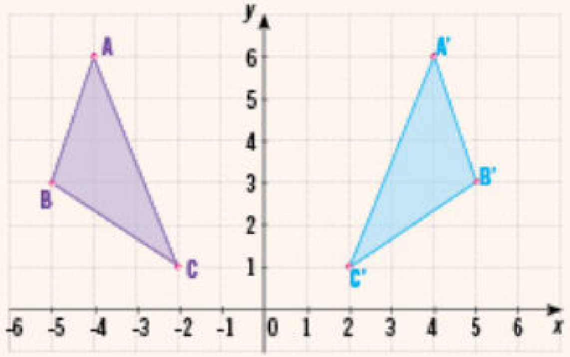
1. Traslada la figura con los puntos indicados A, B, C y D.
   a. ¿Qué relación hay entre el segmento CO y el segmento C'O?
   b. ¿Cuál es el punto de traslación?



PARA RESOLVER

Resuelve los problemas y desarrolla en tu cuaderno lo que se indica.

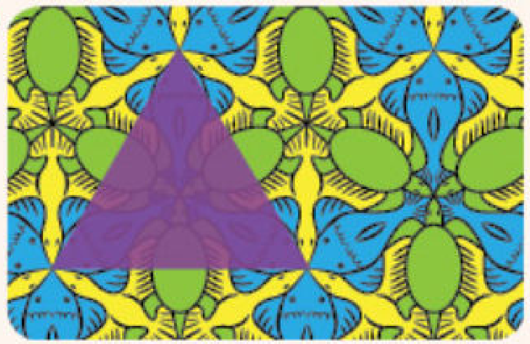
1. Empleando un plano cartesiano,
   a. dibuja la recta L que pasa por los puntos $P_1 = (0, 2)$ y $P_2 = (2, 0)$, y
   b. refleja los puntos $A = (-3, -3)$, $B = (1, -3)$ y $C = (2, 2)$ a través de la recta L.
2. La recta L pasa por los puntos $P1 = (1, 0)$ y $P2 = (0, 4)$.
   a. Refleja $\overline{AB}$, donde $A = (2, 7)$ y $B = (7, 5)$.
3. Escribe la regla utilizada para transformar el triángulo lila ABC en el triángulo azul A'B'C'.



4. La imagen 1 muestra un diseño logrado mediante el uso de las transformaciones geométricas que has estudiado. Obsérvala, mide si es necesario y determina lo siguiente.
   a. ¿Cuál es la figura básica a partir de la que se genera todo el teselado?
   b. ¿La figura básica presenta simetría axial?, ¿cuáles son los ejes de simetría?
   c. ¿La figura básica presenta simetría central?, ¿cuál es el punto de reflexión?
   d. ¿Cuántos grados se rotó alguna sección del teselado para generarlo?
   e. ¿Cuántos centímetros se trasladó alguna sección del teselado para formarlo?
5. Toma como base la imagen 2 y realiza un teselado en tu cuaderno aplicando las transformaciones necesarias.

Con ayuda de tu profesor describe el procedimiento y las transformaciones que necesitaste para poder dibujarlo.

1

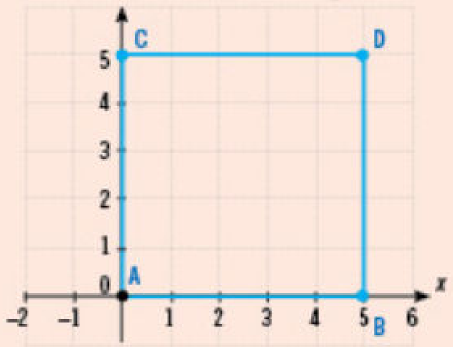

2


PARA TERMINAR

Con la guía y supervisión de tu profesor, reúnete con un compañero y realicen la actividad en su cuaderno. Cada uno trabajará en su propio cuaderno, pero de modo que vayan comparando sus trazos en todo momento.

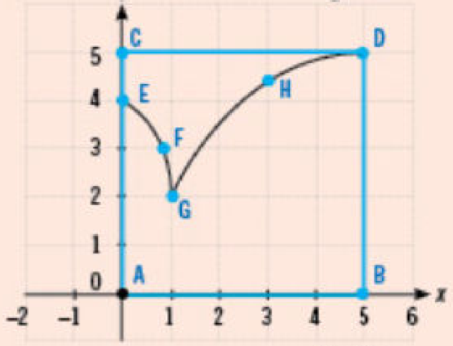
1. Tracen en una hoja tamaño carta con una cuadrícula de 3 mm por cuadro, un cuadrado como el que se muestra en la figura 1, tomando como unidad un cuadro de la cuadrícula.

Figura 1



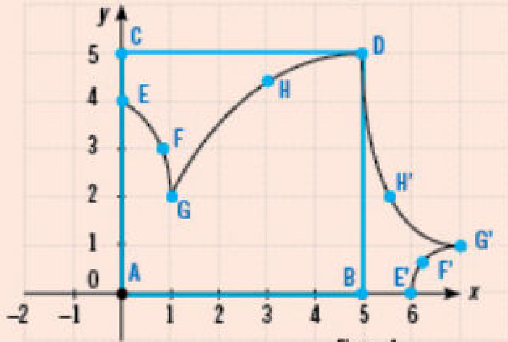
2. Empleando su compás, tracen de manera aproximada las curvas que se muestran en la figura 2.

Figura 2



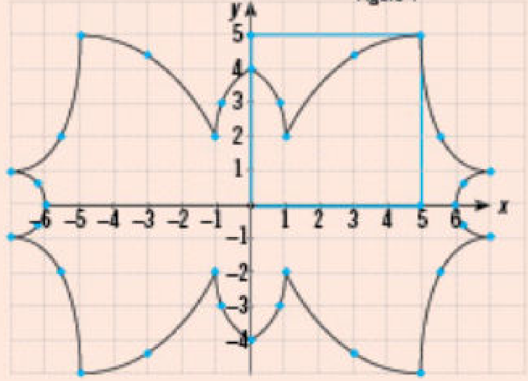
3. En la figura 3 se muestra el efecto de realizar una transformación a las dos curvas del diseño.
   a. ¿Qué transformación se realizó?
   b. Tracen en su hoja la transformación.

Figura 3



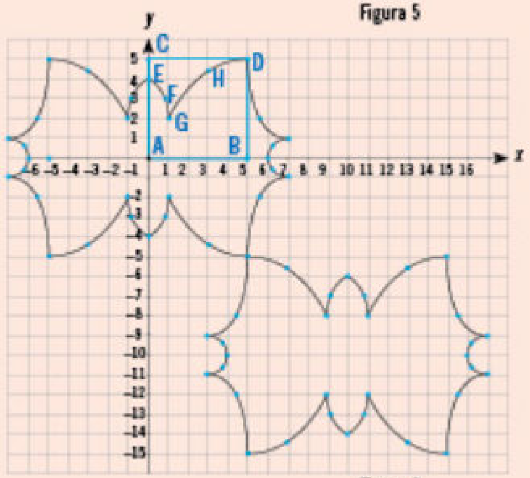
4. Observen la figura 4.
¿Qué transformación deben hacer a su construcción para obtener el diseño mostrado? Tracen en sus respectivos cuadernos la figura aplicando las transformaciones necesarias.

Figura 4



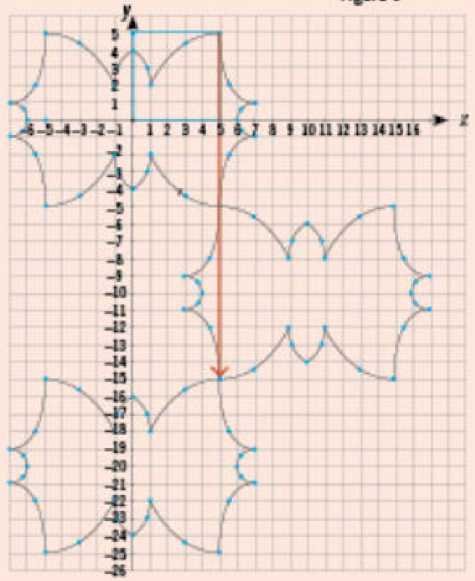
5. Nuevamente, se ha aplicado una transformación al diseño de la figura 5, identifiquen de cuál se trata y apliquenla en su dibujo.

Figura 5



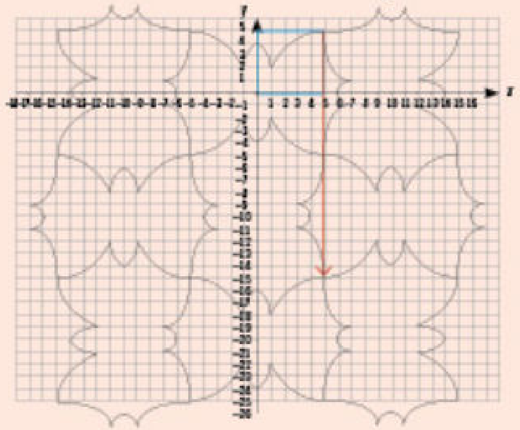
6. Continúen aplicando las transformaciones necesarias para terminar su diseño, como se muestra en la figura 6.

Figura 6



7. ¿Qué transformaciones fueron necesarias para completar el diseño? Descríbanlas en su cuaderno.

Figura 7



Con ayuda de su profesor, comenten con otras parejas sus respuestas y comparen su resultado final. Si no lograron obtener la figura 7, encuentren la causa y efectúen las correcciones necesarias.

LECCIÓN 4

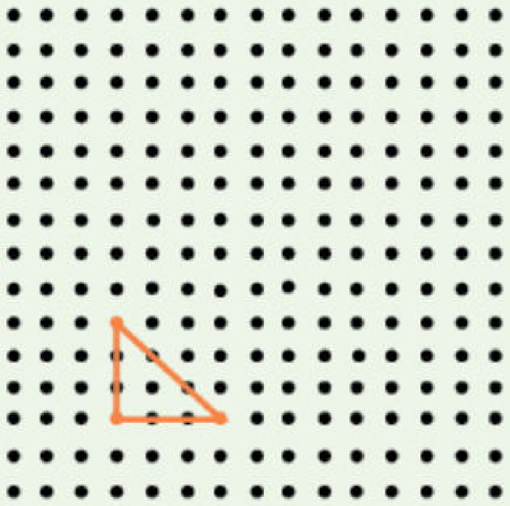
ANÁLISIS DE LAS RELACIONES ENTRE LAS ÁREAS DE LOS CUADRADOS QUE SE CONSTRUYEN SOBRE LOS LADOS DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Los triángulos rectángulos se forman al dividir, de extremo a extremo, un cuadrado o un rectángulo en dos partes iguales por la diagonal. ¿Cuántos triángulos rectángulos puedes formar en tu salón de clases?, ¿cuál es la característica de un triángulo rectángulo? Las relaciones entre los lados de este triángulo constituyen un problema que causó inquietud y que se resolvió desde la antigüedad, ya que así se calculaban las alturas de cerros y pirámides, sin medirlas directamente, tomando en cuenta tan sólo la sombra y la semejanza de figuras. ¿Cuál es la relación entre los lados de un triángulo rectángulo?, ¿qué relación tiene con el teorema de Pitágoras?

PARA COMENZAR

Lee con atención y desarrolla lo que se indica en tu cuaderno.

Martha trazó un triángulo como el que se muestra.

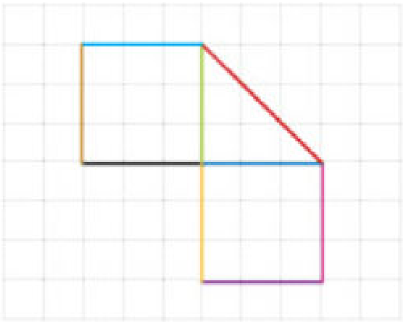


1. Responde las preguntas siguientes.
   a. ¿Cuánto miden los lados del triángulo?
   b. ¿Cómo se denomina a este tipo de triángulos?
2. Traza un cuadrado sobre cada uno de los lados, cuyo lado sea precisamente el lado del triángulo.
   a. ¿Cuánto mide el área de los cuadrados que trazaste?
3. Suma las áreas de los cuadrados más pequeños y compara la suma con el área del cuadrado mayor.

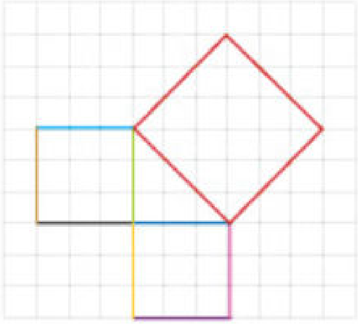
Con ayuda de tu profesor, compara tus respuestas con las de otros compañeros. ¿Obtuvieron los mismos resultados? De no ser así, efectúen las correcciones necesarias.

Construcción de cuadrados sobre los lados de un triángulo rectángulo

La figura de la derecha se formó en un geoplano, analízala y desarrolla la actividad en tu cuaderno.



1. ¿Cómo son entre sí las medidas de dos de los lados del triángulo y las de los dos lados de los cuadrados?
2. Divide los cuadrados que se forman en cuatro partes, traza las dos diagonales de cada uno de éstos. ¿Cómo son entre sí los triángulos que se formaron?, ¿por qué?
3. Traza nuevamente las diagonales de los cuadrados, rellena los triángulos de diferentes colores y colócalos dentro del nuevo cuadrado construido.
4. Dibuja en tu cuaderno una forma distinta de acomodar los triángulos en el cuadrado más grande.



   a. ¿Cuánto mide el área de los tres cuadrados?, ¿qué puedes deducir al respecto?

Con ayuda de tu profesor, comenta tus respuestas con otros compañeros. Discutan la posibilidad de encontrar más de una respuesta correcta.

HISTORIA DE LAS PALABRAS

La palabra "poliedro" se deriva del griego "*polyedron*". Es una palabra compuesta por el término "*polys*", que significa "muchas" y "*edra*", "caras". Poliedro significa "sólido limitado por superficies planas".

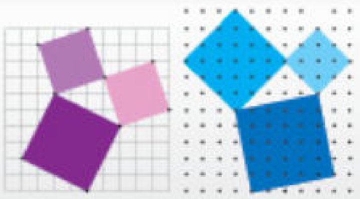
PARA SABER MÁS

Los lados de un triángulo rectángulo que son perpendiculares entre sí se denominan catetos y el tercer lado hipotenusa. Si los catetos miden lo mismo, el triángulo recibe el nombre de isorrectángulo.

Reto

Haz lo que se te indica.

Determina el área del cuadrado más grande de cada figura.



Relación entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos

Antonio acudió a la feria de matemáticas y decidió jugar al rompecabezas. Primero tenía que conformar los cuadrados construidos sobre los catetos con siete figuras geométricas distintas. Él lo hizo como se muestra en la figura 1.

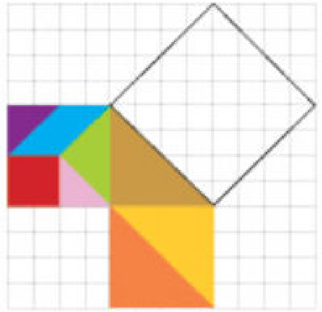


Figura 1

1. Ayuda a Antonio a responder las preguntas siguientes.
   a. ¿Con cuáles figuras se han formado cada uno de los cuadrados?
   b. ¿Cuánto mide el área del triángulo de color verde?
   c. ¿Cuánto mide el área del de color naranja?
   d. ¿Cuánto mide el área de cada una de las figuras que están dentro del cuadrado que contiene el triángulo de color verde?
   e. ¿Cómo son entre sí las áreas de los dos cuadrados?

2. Si posteriormente le dieron a Antonio otras siete piezas iguales y le pidieron que con ellas conformara el cuadrado más grande, ¿cómo podría hacerlo? Traza en la figura 2 lo que habrías hecho tú.
3. Y si le preguntaran "¿qué relación se puede establecer entre las áreas de los cuadrados anteriores con el área del nuevo cuadrado?", ¿cuál habría sido su respuesta? Escribe en tu cuaderno lo que podría contestar.

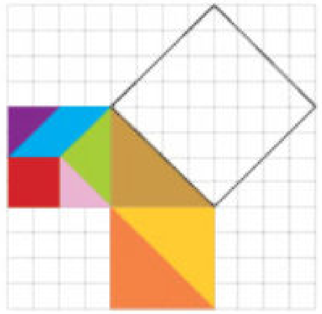


Figura 2

Con ayuda de tu profesor, revisa con tus compañeros si hay más de una manera de construir el cuadrado mayor empleando las siete piezas. Comenten sus repuestas a las diferentes preguntas y efectúen las correcciones necesarias. Para responder a la última pregunta, obtengan una conclusión grupal.

LECTURALIA

La demostración de la relación entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo se le atribuye a Pitágoras, por eso, te invitamos a leer su biografía en el capítulo 3 del libro *Matemática… ¿estás ahí?*, de Adrián Paenza.

Pueden dercargar la versión electrónica de este libro en el sitio: http://mate.dm.uba.ar/~cspaenza/libro/matematica4.pdf (consultado el 17 de marzo de 2016).

MATEMÁTICAS HISTÓRICAS

La relación entre los lados de un triángulo cuyas medidas son 3, 4 y 5 unidades, respectivamente, ya era conocida probablemente en 1100 a.n.e. En el libro chino sobre matemáticas más conocido, *Nueve capítulos del arte matemático*, se encontró el enunciado: "El cuadrado del primer lado y el del segundo lado se suman, entonces la raíz cuadrada es la hipotenusa".

Fuente: *Las matemáticas de la antigüedad y su contexto histórico*, de Carlos Maza.

REFLEXIONA

Si los triángulos no fueran isorrectángulos, ¿existiría la misma relación entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos?, ¿por qué?

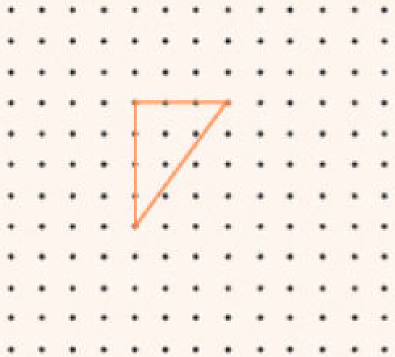
PARA SABER MÁS

Las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo están relacionadas de forma tal, que el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.

PARA RESOLVER

Traza los cuadrados sobre los catetos del triángulo rectángulo.

a. ¿Cuánto miden los lados del triángulo?
b. ¿Cuánto mide el área de cada uno de los cuadrados?



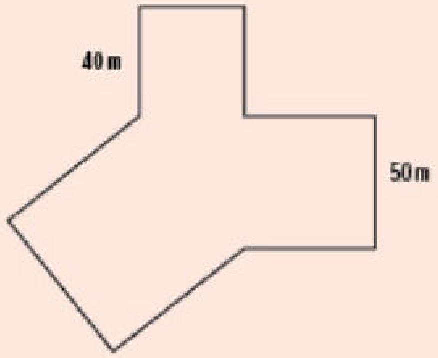
Con la guía de tu profesor, obtén una conclusión general con el resto de tus compañeros.

PARA TERMINAR

Analiza el problema y contesta las preguntas en tu cuaderno.

Martín es arquitecto, él ha trazado el plano de un terreno de la manera siguiente.

1. Si quiere dividirlo en tres terrenos cuadrangulares y que entre éstos haya un patio triangular, ¿cómo podría dividirlo? Traza en el plano lo que podría hacer.
   a. ¿Cuánto mediría el área del terreno más pequeño?
   b. ¿Cuánto mediría el área del terreno mediano?
   c. ¿Por qué para obtener el área del terreno más grande es necesario conocer la medida de sus lados?
   d. ¿Cuánto mediría su área?



Con la ayuda de tu profesor, compara las respuestas con tus compañeros. Si hay diferencias en sus resultados, revisen sus procedimientos y efectúen las correcciones que sean necesarias.

LECCIÓN 5

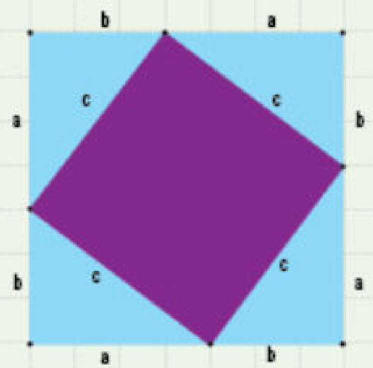
EXPLICITACIÓN Y USO DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

El teorema de Pitágoras es uno de los modelos matemáticos más antiguos, sorprendentes y con mayor aplicación y difusión. Se define como una propiedad de los triángulos rectángulos. Aunque se adjudica a Pitágoras de Samos, uno de los sabios de la antigua Grecia, los egipcios lo usaban para cuadrar sus terrenos. El teorema de Pitágoras se aplica en situaciones sumamente diversas; por ejemplo, para determinar el tamaño de una pantalla de televisión mediante la medida de su diagonal. ¿Sabes cómo calcular la diagonal de un cuadrado a partir de conocer la medida de sus lados? Galileo Galilei utilizó este teorema para determinar la altura de algunas montañas lunares. También se puede emplear para la construcción de velas para barcos y para calcular estructuras de puentes.

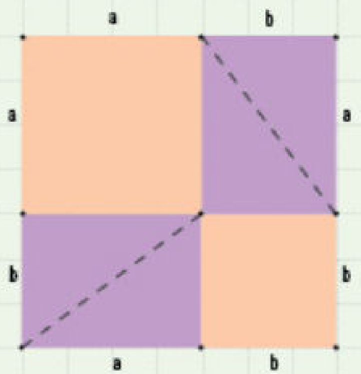
PARA COMENZAR

Reúnete con un compañero y observen las figuras siguientes.

Vamos a demostrar la relación que existe entre los lados adyacentes (catetos) y el lado opuesto (hipotenusa) al ángulo recto en un triángulo rectángulo.



Cuadrado A



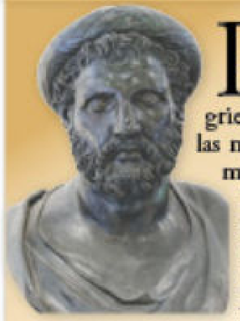
Cuadrado B

1. En el cuadrado A.
   a. ¿Qué tipo de triángulos son los formados por los lados a, b y c?
   b. ¿Cómo son los triángulos formados por los lados a, b y c? ¿Cuál es el valor del área de cada uno de los triángulos azules?
   c. Escriban en su cuaderno la suma del área de los cuatro triángulos azules del cuadrado A.
   d. Calculen el área del cuadrado lila.
   e. Determinen el área total del cuadrado A de dos formas distintas.
      - ¿Cuál es el área del cuadrado cuyo lado es a + b?
      - ¿Cuál es el área del cuadrado si se consideran las áreas de las figuras inscritas en él?
      - ¿A qué conclusión pueden llegar?

2. En el cuadrado B.
   a. Calculen el área de cada cuadrado inscrito en el cuadrado B.
   b. Determinen el área de cada rectángulo.
   c. Sumen todas las áreas que obtuvieron.
   d. ¿Cuál es el área del cuadrado B de lado a+b?
   e. ¿Qué igualdad se cumple entre el área total del cuadrado y la suma de todas las figuras inscritas?, ¿es la misma propiedad que la observada en el cuadrado A? Expliquen por qué.

Comparen sus resultados con el resto del grupo. En caso de haber diferencias, consulten con su profesor para llegar a un resultado común.

MATEMÁTICAS HISTÓRICAS



A Pitágoras se le atribuyen viajes realizados a Egipto y Babilonia.

Pitágoras de Samos (580 a.n.e.-500 a.n.e.) fue un filósofo y matemático griego que creó una de las escuelas más influyentes en el pensamiento matemático griego. Nació en la isla de Samos, en el mar Egeo, pero la tiranía de Polícrates le hizo abandonar Samos, trasladándose a Italia y estableciéndose en Crotona. Allí creó una secta política, filosófica y religiosa, inspirada en el orfismo, cuyos miembros vivían en comunidad de bienes, participando de un conjunto de creencias y saberes que permanecían en secreto para los no iniciados. Sobre el mismo Pitágoras, nos dice un cronista que "parece que concedió una importancia suprema al estudio de la aritmética, la cual avanzó y llevó a cabo para el dominio en la utilidad comercial".

Se le adjudica a Pitágoras el descubrimiento de las leyes de la armonía y de las relaciones aritméticas con la escala musical. Descubrió que las diferentes notas musicales, producidas por el sonido de una cuerda vibrante, dependían de la longitud de la cuerda, y, en particular, que un sonido armónico era producido por el punteo de una cuerda, cuyas vibraciones hacían vibrar a otra cuerda de la mitad de longitud que la primera.

Fuente: Instituto de Matemáticas de la UNAM.

Aplicación del teorema de Pitágoras

Con ayuda de tu profesor, reúnete con un compañero y realicen la actividad en su cuaderno.

PARA SABER MÁS

El teorema de Pitágoras en forma verbalizada nos dice: "La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa".

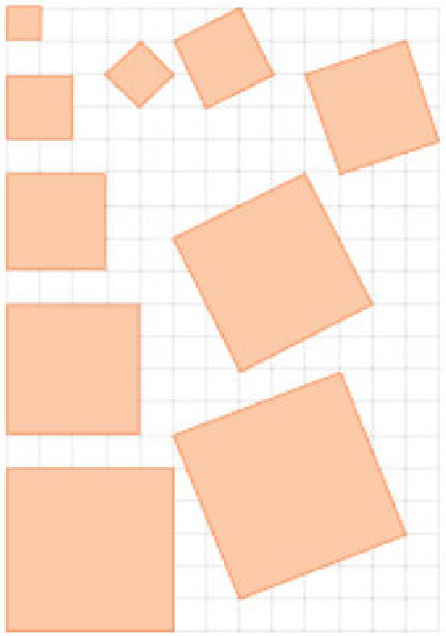
Parte 1

1. En una hoja cuadriculada tracen tantos cuadrados con áreas entre 1 y 100 como sea posible. En cada esquina del cuadrado tiene que haber un punto de la cuadrícula. Las líneas que delimiten los lados de sus cuadrados no solamente pueden ser verticales y horizontales, también pueden ser inclinadas.
   a. ¿Cómo se puede obtener el área de cada uno de los cuadrados trazados?
   b. ¿Qué sucede con los cuadrados inclinados?, ¿aplica el mismo procedimiento?

Con ayuda de su profesor, compartan sus respuestas con otras parejas y obtengan una conclusión común. Discutan la posibilidad de encontrar más de una respuesta correcta.

Parte 2

1. Analicen los cuadrados trazados en la cuadrícula siguiente y después completen la tabla con ayuda de dichos cuadrados. En el caso de los cuadrados inclinados, utilicen la ecuación que establecieron para el teorema de Pitágoras en la actividad. Para comenzar, el lado del cuadrado corresponde a la hipotenusa c de un triángulo rectángulo, cuyos catetos son a y b, de esta manera, al cuadrado de área 10 le corresponde un lado $c=\sqrt{10}$, donde los catetos serían $a=3$ y $b=1$.



Área	Longitud del lado
1	
4	2
9	
16	
25	
36	
121	
2	
5	
10	$\sqrt{10}$
20	
29	
	$\sqrt{13}$
	$\sqrt{52}$

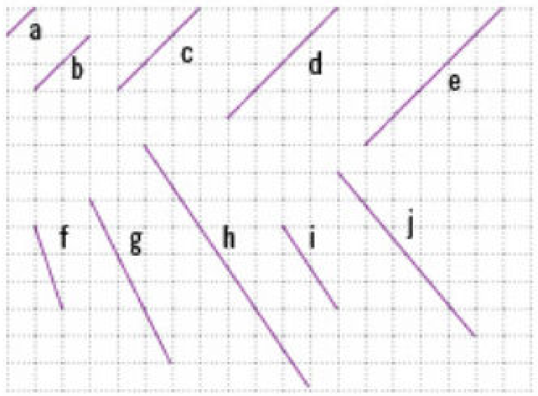
a. ¿Pueden trazar un cuadrado en una cuadrícula que abarque exactamente 10 unidades cuadradas?
b. ¿Pueden trazar un segmento de recta que mida exactamente $\sqrt{2}$ unidades?
c. ¿Habrá más cuadrados de los que se muestran? Trácenlos.
d. Si conocieran el área del cuadrado, ¿podrían encontrar la longitud del lado?
e. ¿Qué significa la raíz cuadrada de 61?
f. ¿Cómo es la longitud del lado de un cuadrado en relación con el área de éste?

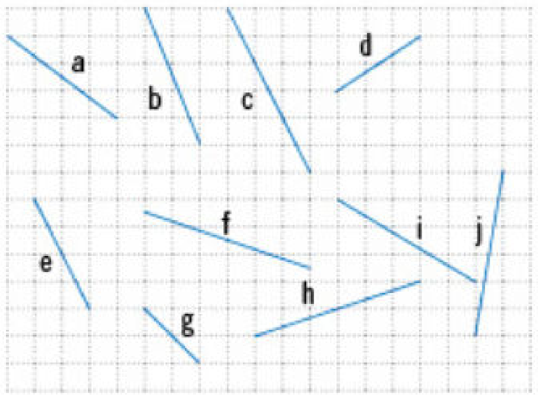
Con ayuda de su profesor, compartan sus respuestas con otras parejas. Si hay diferencias, analicen a qué se debieron y efectúen las correcciones necesarias.

Parte 3

Problema 1

Utilizando su trabajo de la actividad previa, determinen la longitud de cada uno de los segmentos siguientes. Si es posible, encuentren una segunda forma de expresar la longitud; de ser necesario, soliciten el apoyo de su profesor.





Problema 2

a. ¿Cuál es la conexión entre el área de un cuadrado y la longitud de ese lado?
b. ¿Por qué consideran que se debe simplificar a su forma más sencilla un radical?
c. Escriban el patrón para determinar la longitud de los segmentos anteriores.

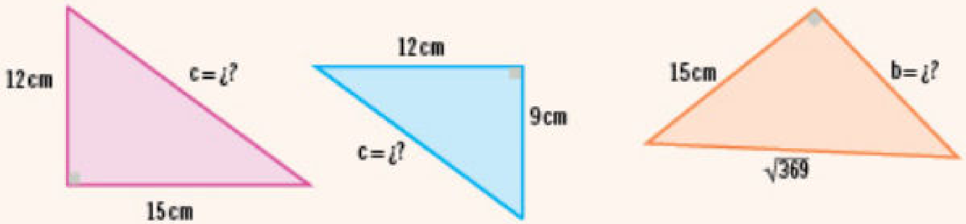
Parte 4

1. En una hoja cuadriculada tracen los segmentos de líneas con las longitudes: 4, 5, 7, 9,10, 20, $\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{18}$ y $\sqrt{20}$.
2. Con la guía de su profesor, compartan con el resto de la clase las formas diferentes que encontraron para trazar cada una de los segmentos.
3. Por último, describan la aplicación que encontraron para el teorema de Pitágoras y, con la guía de su profesor, obtengan una conclusión grupal.

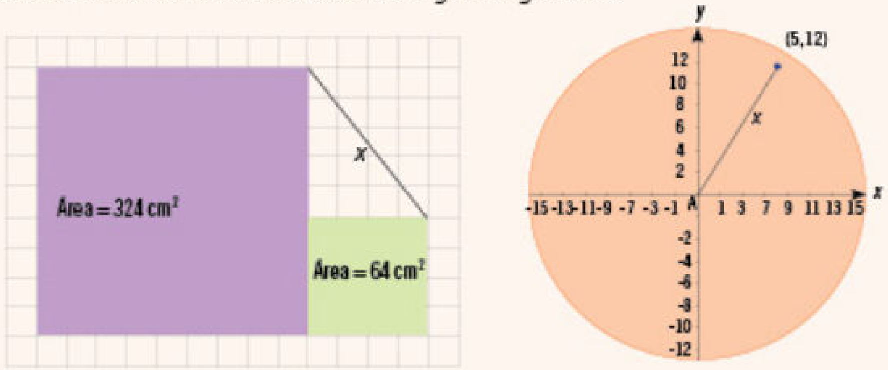
PARA RESOLVER

Resuelve los problemas que se plantean a continuación en tu cuaderno.

1. Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular las longitudes de los lados indicados.



2. Calcula la medida de *x* en cada una de las figuras siguientes.



3. En una hoja de tu cuaderno construye, utilizando regla y compás, un triángulo cuyos lados midan 17 cm, 15 cm y 8 cm. Con la ayuda del transportador, mide el ángulo mayor y verifica si estos tres números satisfacen la igualdad $a^2 + b^2 = c^2$. ¿A qué se debe que la cumplan o no la cumplan?
4. Sean los valores de lados para cuatro triángulos diferentes, A, B, C, y D:
   Triángulo A ($a = 3$, $b = 4$ y $c = 5$)
   Triángulo B ($a = 6$, $b = 8$ y $c = 10$)
   Triángulo C ($a = 9$, $b = 12$ y $c = 15$)
   Triángulo D ($a = 4$, $b = 6$ y $c = 12$)
   a. Para cada triángulo sustituye los valores en el teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$.
   b. Para cada una de las ternas pitagóricas construye con regla y compás los triángulos A, B, C, D y mide con el transportador el ángulo mayor.
   c. ¿Cuánto mide el ángulo mayor de cada triángulo?
   d. ¿Cuál de las ternas no cumple la igualdad del teorema de Pitágoras?
   e. ¿En cuál de las ternas el ángulo mayor no es de 90°?
   f. ¿Qué nombre le darías a los triángulos conformados por las ternas de números que cumplen la igualdad del teorema de Pitágoras?

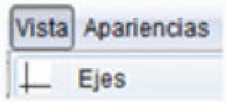
Con la guía de tu profesor, comparte tus resultados con tus compañeros. En caso necesario, efectúa las correcciones pertinentes.

TIC

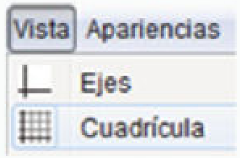
Desarrolla la actividad, utilizando el *software* de geometría dinámica GeoGebra.

1. Abre un nuevo archivo en GeoGebra.

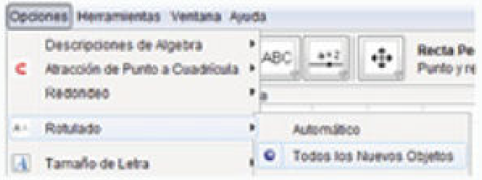
2. Oculta los ejes de coordenadas seleccionando en el menú **Vista** la herramienta **Ejes**.



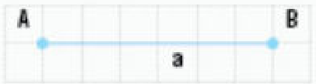
3. Activa la cuadrícula seleccionando en el menú **Vista** la herramienta **Cuadrícula**.



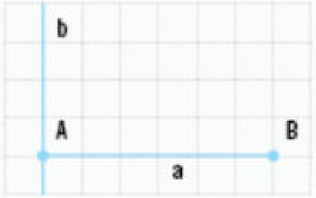
4. Activa en el menú **Opciones** la herramienta **Rotulado-Todos los nuevos objetos**, para que todos los objetos tengan rótulo.



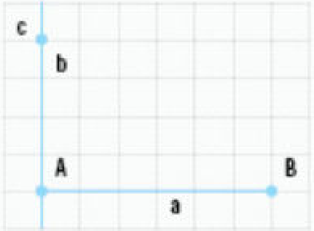
5. Activa la herramienta **Segmento entre Dos Puntos** y construye el segmento a entre los puntos A y B.



6. Activa la herramienta **Recta Perpendicular** y construye la recta b que es perpendicular al segmento a y que pasa por el punto A.

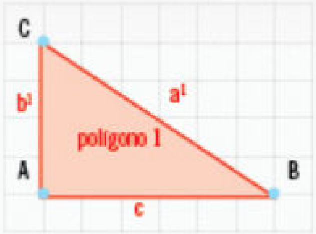


7. Activa la herramienta **Nuevo Punto** y construye el punto C en la recta b.

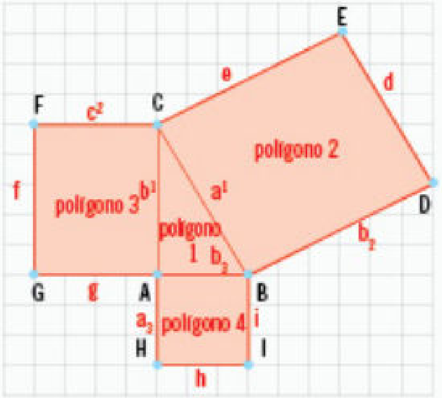


8. Activa la herramienta **Expone / Oculta Objeto** para ocultar el segmento a y la recta b, haciendo clic sobre cada una de ellas, respectivamente.

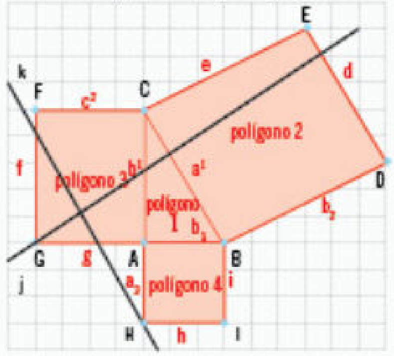
9. Con la herramienta **Polígono** construye el triángulo ABC.



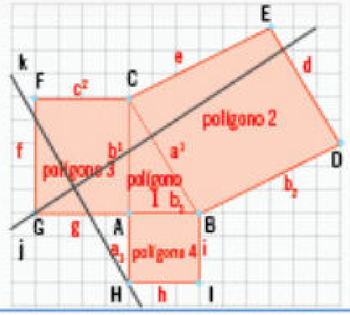
10. Activa la herramienta **Polígono Regular** y construye tres cuadrados, uno en cada lado del triángulo, para ello marca dos vértices del triángulo e indica que el polígono tendrá cuatro lados (si el cuadrado queda dentro del triángulo, vuelve con Ctrl+Z y ahora marca los vértices del triángulo en el orden contrario). Construye primero el cuadrado sobre la hipotenusa BC, de tal forma que quede el cuadrado BCED, luego sobre el lado CA de manera que quede el cuadrado CAGF y, por último, el cuadrado sobre el lado BA para que quede el cuadrado BAHI. Ahora mueve la figura hasta que el cuadrado CAGF sea más grande que el cuadrado BAHI.



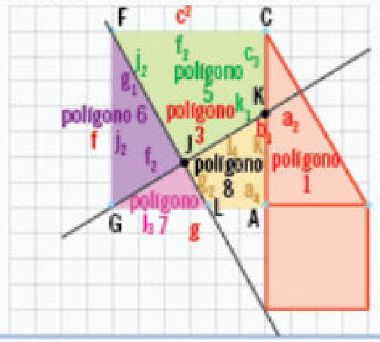
11. Activa la herramienta **Recta Paralela** y construye la recta j que es paralela al segmento CE y que pasa por el punto G. También construye la recta k que es paralela al segmento ED por el punto F.



12. Con la herramienta **Intersección entre Dos Objetos** construye el punto J que es la intersección de las dos rectas anteriores, j y k. Establece también la intersección K de la recta j con el lado del cuadrado CAGF y la intersección L de la recta k con el otro lado del cuadrado CAGF.

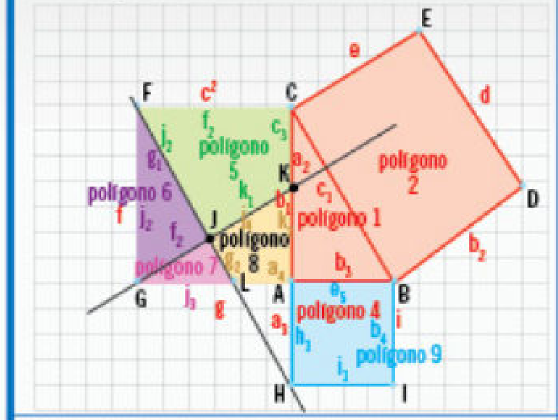


13. Utiliza la herramienta **Polígono** y construye los polígonos CKJF, FJG, GJL y ALJK. Haz clic derecho sobre cada uno y elige en el menú contextual la opción **Propiedades**. En la pestaña de **Color** elige algún color distinto para cada uno.



Continúa...

14. Con la herramienta **Polígono** construye otro polígono ABIH y cámbiale el color.

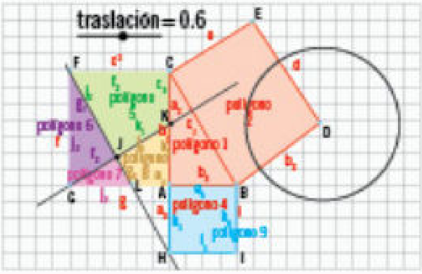


15. Activa la herramienta **Deslizador** y construye un deslizador llamado **traslación**, éste se debe definir de 0 a 1 con un incremento de 0.01.

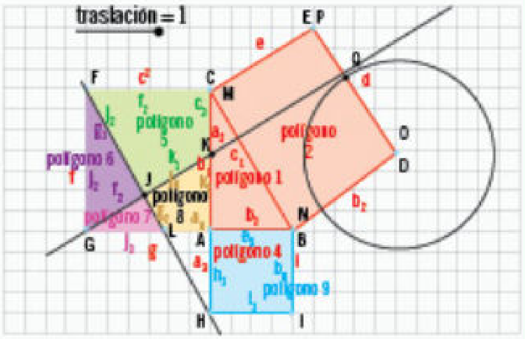
16. Escribe en la línea de entrada:

(a) **M = J + traslacion * (C–J)**
(b) **N = J + traslacion * (B–J)**
(c) **O = J + traslacion * (D–J)**
(d) **P = J + traslacion * (E–J)**

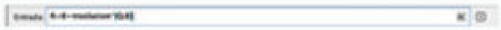
17. Activa la herramienta **Compás** y construye la circunferencia p con radio dado por los puntos F y J y cuyo centro es D (marca los tres puntos en ese orden). Asegúrate que en realidad estás marcando el punto D como centro del círculo, para ello, se sugiere que coloques el deslizador traslación en incrementos de 0.6.



18. Activa la herramienta **Intersección entre Dos Objetos** y construye el punto Q que es la intersección de la circunferencia p con el segmento DE.

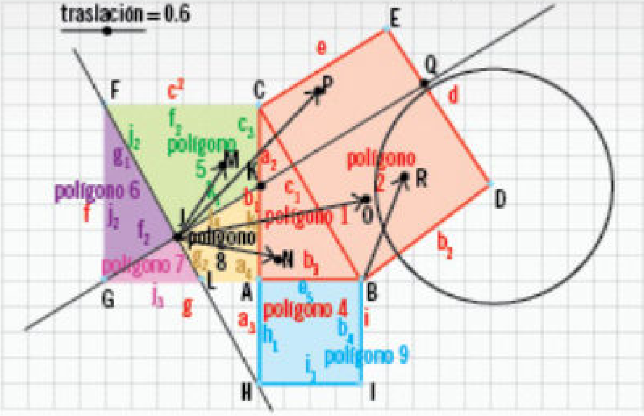


19. Escribe en la línea de entrada: **R = B + traslacion * (Q–B)**.

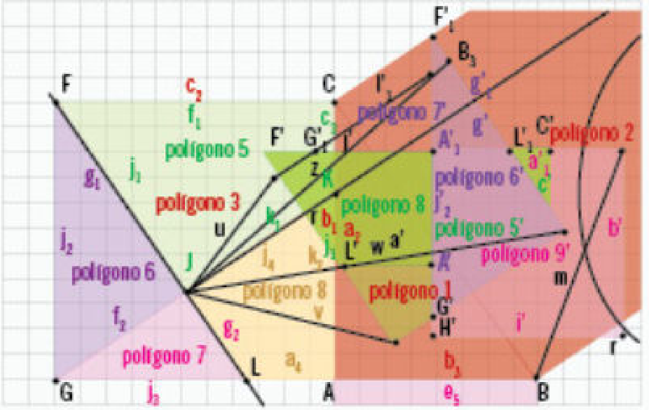


Continúa...

20. Activa la herramienta **Vector entre Dos Puntos** y construye el vector u del punto J al punto M; el vector v del punto J al punto N; el vector w del punto J al punto O; el vector z del punto J al punto P y el vector m del punto B al punto R.



21. Activa la herramienta **Traslada Objeto por un Vector** y marca en orden al polígono AKJL (marca el polígono en el centro, no en los puntos) y al vector u. Luego el polígono FCKJ respecto al vector v; el polígono FJG respecto al vector w; el polígono GJL respecto al vector z y el polígono ABIH respecto al vector m.



22. Activa la herramienta **Elige y Mueve** y mueve el **deslizador traslación** para ver el efecto.

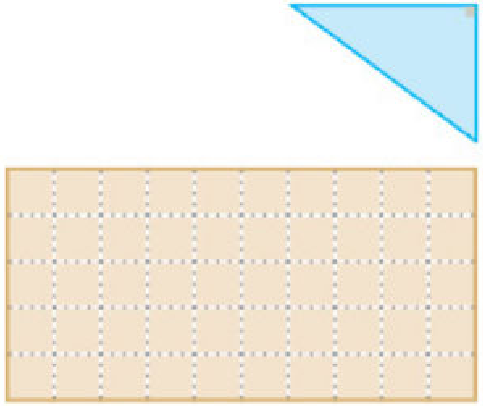
24. Activa la herramienta **Expone / Oculta Rótulo** para ocultar todos los rótulos que no hagan falta.

23. Activa la herramienta **Expone / Oculta Objeto** para ocultar todos los objetos que ya no se necesiten; los vectores y los polígonos que no se mueven, por ejemplo.

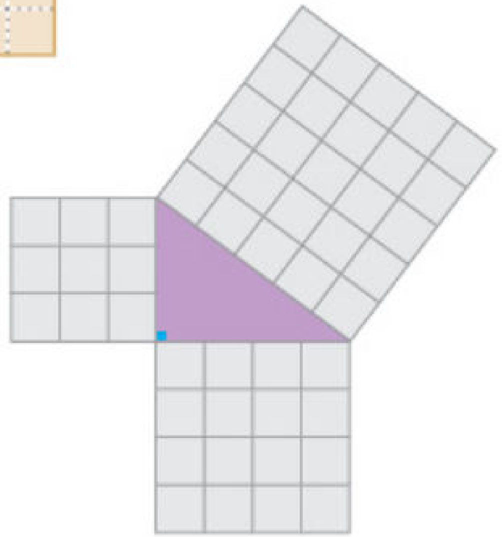
25. Para iniciar la animación, haz clic derecho sobre el **deslizador traslación** y en el menú emergente activa **Animación Automática**, con esto inicia la animación en la pantalla. Para detenerla, vuelve a hacer clic derecho sobre el **deslizador traslación** y desactiva la **Animación Automática**.

Formalización del teorema de Pitágoras

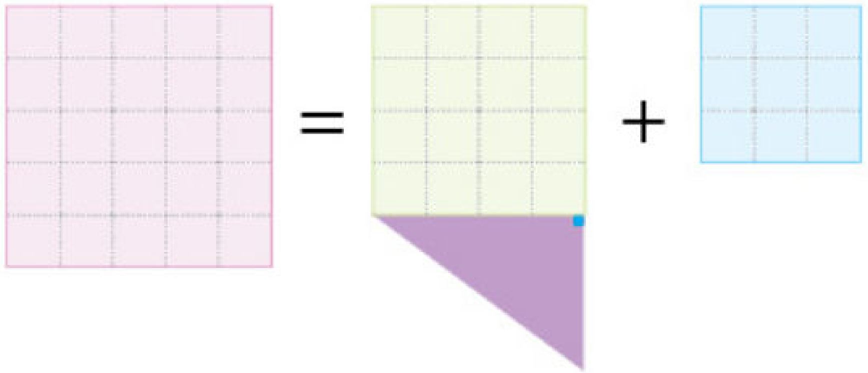
1. En tu cuaderno, en una hoja cuadriculada, construye un triángulo rectángulo cuyos lados midan 3, 4 y 5 cm. Construye también un rectángulo cuyos lados midan 10 y 5 cm, respectivamente, como se muestra en las figuras de abajo.



2. Después traza y recorta tres cuadrados, de modo que al colocarlos sobre cada uno de los lados del triángulo formen la figura de la derecha.
   a. ¿Cuántos cuadrados se construyeron con los cuadros recortados?
   b. ¿Cuánto mide el área de cada uno de los cuadrados formados?
   c. Compara tu figura con la que hicieron tus compañeros. ¿Todas las figuras son iguales?



3. Ahora coloca los cuadrados para formar la figura siguiente.



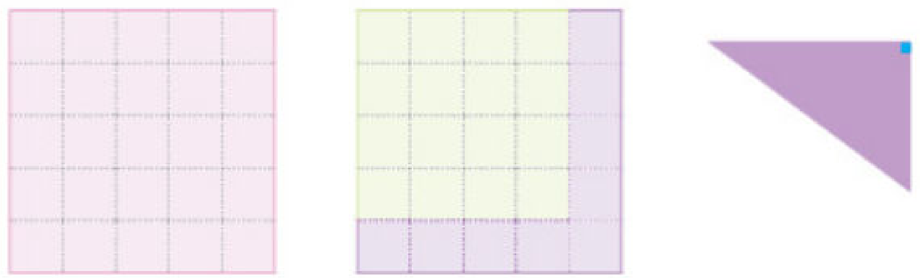
a. ¿Es igual el cuadrado construido sobre la hipotenusa a la suma de los cuadrados construidos sobre los lados que forman el ángulo recto?

4. Si le asignamos literales a las variables de la figura anterior tenemos las figuras que se observan abajo.

$$c^2 = b^2 + a^2$$

5. Recorta, según sea necesario, y luego junta los cuadros del cuadrado a^2 y los cuadros del cuadrado b^2 hasta obtener la figura siguiente.

$$c^2 = a^2 + b^2$$



PARA SABER MÁS

El pie (ft) es la unidad de longitud en el Sistema Técnico Inglés. Un metro equivale a 3.28 pies, aproximadamente.

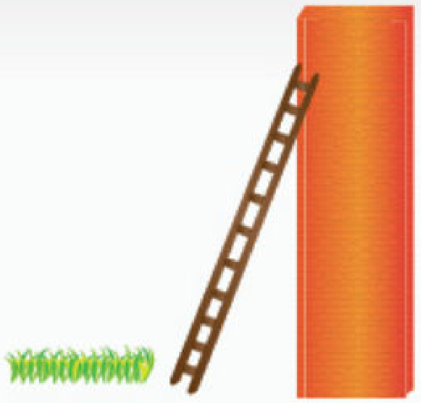
Si las longitudes de los catetos son a, b, y la longitud de la hipotenusa es c, la conjetura a la que acabas de llegar escribiendo $a^2+b^2=c^2$ se le llama teorema de Pitágoras.

En tu cuaderno, escribe con tus palabras lo que representa la expresión obtenida. Así, si a y b son las longitudes de los catetos y c es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, tenemos que $a^2+b^2=c^2$.

Con la guía de tu profesor, comparte los resultados con tus compañeros. Revisen sus respectivos procedimientos y asegúrense de haber llegado a la misma conclusión.

Tarea en casa

Resuelve en tu cuaderno los problemas que se plantean.

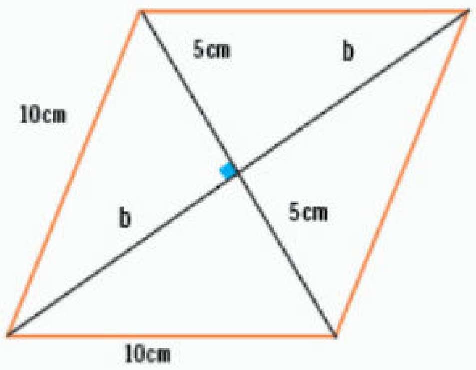


Problema 1

Una escalera de 12 ft de longitud está apoyada contra una pared, de modo que su base se encuentra a 4 ft de la pared al nivel del suelo, como se muestra en la figura. ¿Cuál es la altura de la pared hasta donde está recargada la escalera?

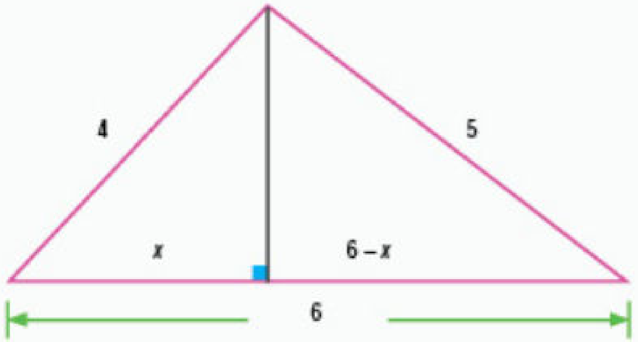
Problema 2

Una de las diagonales de un rombo tiene la misma longitud que cada uno de sus lados, según se muestra en la figura. ¿Cuál es la longitud de la otra diagonal?



Problema 3

Un triángulo tiene lados de longitud 4, 5 y 6, como se muestra en la figura de abajo. Encuentra la longitud de la altura para el lado de longitud 6.



REFLEXIONA

Los fabricantes de televisores especifican el tamaño de sus productos mediante la longitud en pulgadas de la diagonal del televisor, de esta manera, se anuncian televisores de 32", de 55", entre otros.

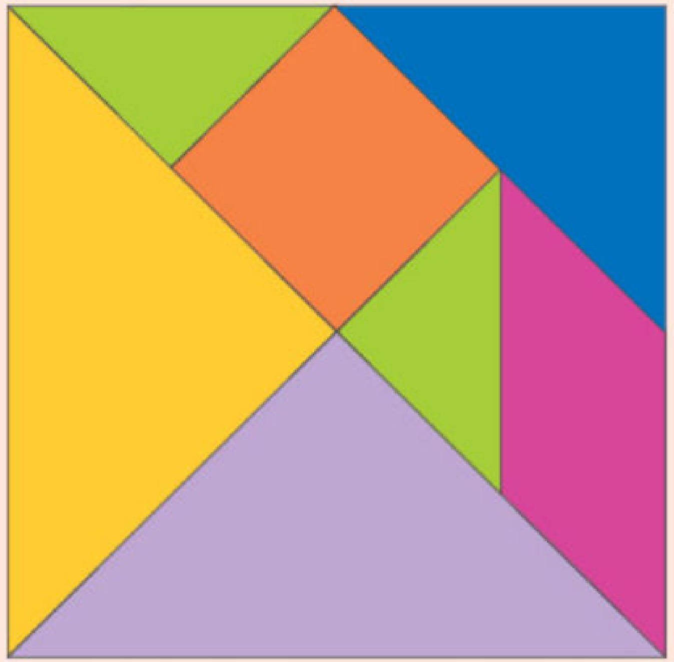
Midiendo en pulgadas los lados de tu televisor, alto y ancho, determina si los datos que te proporciona el fabricante coinciden con los que tú calcules.

Si mides de manera directa la diagonal de tu televisor, ¿este valor coincide con el valor que calculaste?, ¿por qué?

PARA TERMINAR

Lee con atención el planteamiento y contesta las preguntas que se plantean después en tu cuaderno.

El Tangram es un juego chino muy antiguo que consiste en formar siluetas de figuras con siete piezas dadas, sin esconderlas o encimarlas. Las siete piezas, llamadas 'tans', son cinco triángulos de diferentes tamaños, un cuadrado y un romboide. Si la pieza cuadrada anaranjada del tangram mide $\sqrt{20}$ cm² de lado, responde lo siguiente:



a. ¿Cuánto miden los lados de las piezas triangulares verdes?
b. ¿Cuáles son las dimensiones de las piezas restantes del Tangram?
c. ¿Cuánto mide el área del cuadrado completo?

Compara tus respuestas con el grupo. Si hay diferencias en sus resultados, revisen sus procedimientos y efectúen las correcciones que sean necesarias.

LECCIÓN 6

CÁLCULO DE LA PROBABILIDAD DE OCURRENCIA DE DOS EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES Y DE EVENTOS COMPLEMENTARIOS (REGLA DE LA SUMA)

La probabilidad surge a partir de dilucidar la frecuencia con que se repite un suceso aleatorio, por esta razón, para entender los procesos de probabilidad se recurre a problemas de juegos de azar. Actualmente, la probabilidad está presente en casi cualquier actividad financiera, lo cual implica que, hasta cierto punto, el mundo de las finanzas se asemeja a un juego de azar. ¿Qué es un juego de azar?, ¿qué es una inversión?, ¿qué tienen en común una inversión financiera y un juego de azar?

Los naipes y los dados son ejemplos representativos de los juegos de azar.

PARA COMENZAR

Con ayuda de tu profesor, reúnete con un compañero para resolver el problema siguiente en tu cuaderno.

Un juego de azar no necesariamente dependerá de los colores, en algunos juegos de lotería se extraen al azar bolas numeradas.

1. En una urna opaca se depositan varias bolas, de modo que no pueden distinguirse. Tres de ellas son bolas rojas, cuatro son azules y cinco son negras. Si se extrae al azar una bola,
   a. ¿cuántos elementos tiene el evento "la bola extraída es negra"?;
   b. ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea negra?;
   c. ¿cuántos elementos tiene el evento "la bola extraída es roja"?;
   d. ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea roja?;
   e. ¿cuántos elementos tiene el evento "la bola extraída es roja o la bola es negra"?;
   f. ¿cuál será la probabilidad de que la bola extraída sea negra o roja?;
   g. ¿cuántos elementos tienen en común el evento "la bola extraída es negra" con el evento "la bola extraída es roja"?, y
   h. ¿cómo calculaste la probabilidad del evento "la bola es roja o la bola es negra" a partir del resultado obtenido de la probabilidad de que la bola sea negra o de la probabilidad de que la bola sea roja?

Con ayuda de su profesor, establezcan una fórmula y discutan su propuesta con otras parejas. Si llegaron a distintas fórmulas, discutan cuál será la correcta y expliquen por qué.

MATEMÁTICAS HISTÓRICAS

Antoine de Gombaud, el caballero de Mèré, era un aristócrata francés aficionado al juego de dados. Debido a su nobleza, conoció a otros científicos parisinos de la época, entre ellos Blaise Pascal y Pierre de Fermat. Durante una discusión con ellos sobre la probabilidad en el juego de dados, propuso lo siguiente: "Es más probable que si lanzas cuatro veces el dado, al menos una vez caerá 6, a que si tiras 24 veces los dados, al menos una vez caerá un doble 6".

La solución de este problema la propusieron Pascal y Fermat: demostraron que el segundo evento es más probable que el primero. De esta discusión surgió lo que hoy se conoce como teoría de la probabilidad, propuesta en el libro de Pascal, *Teoría de probabilidad y combinatoria* (1654).

Fuente: *Cálculus. Cálculo con funciones de varias variables y álgebra lineal, con aplicaciones diferenciales y las probabilidades*, de Tom M. Apostol.

Eventos complementarios y regla de la suma

PARA SABER MÁS

Los eventos de probabilidad A y B son mutuamente excluyentes o disjuntos si no tienen elementos en común.

Un popular juego de dados es el que se juega con dos dados idénticos en tamaño y peso. Supongamos que tenemos uno verde y otro rojo. Se lanzan los dados sobre un tapete. Si la suma que aparece al caer los dos dados resulta ser 7 u 11, el jugador que los lanza gana; en caso contrario, pierde.

Con la guía de su profesor, formen equipos de cuatro compañeros para desarrollar la actividad siguiente.

REFLEXIONA

Si lanzas dos dados y te interesa que la suma obtenida sea 8, ¿es importante que los dados sean de diferente color?, ¿por qué?

Parte 1

1. Consigan un par de dados y láncenlos por turnos, hasta que todos y cada uno de los integrantes del equipo hayan efectuado tres lanzamientos. Vayan anotando un punto cada vez que alguien resulte ganador.
   a. ¿Fue mucha la diferencia entre quien obtuvo el primer lugar respecto a quien obtuvo el último lugar?
   b. ¿Cuál pudo haber sido la razón?

Parte 2

1. Listen, de seis en seis, todos los posibles resultados que pueden aparecer al lanzar dos dados.
   a. ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral del experimento de lanzar dos dados? Anoten el resultado de las sumas.
   b. ¿Cuántos elementos tiene el evento "el resultado de la suma al lanzar dos dados es 7"?
   c. ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado de la suma al lanzar dos dados sea 7?
   d. ¿Cuántos elementos tiene el evento "el resultado de la suma al lanzar dos dados es 11"?
   e. ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado de la suma al lanzar dos dados sea 11?
   f. ¿Cuántos elementos tiene el evento "el resultado de la suma al lanzar dos dados es 7 u 11"?
   g. ¿Cuál es la probabilidad del evento B de que el resultado de la suma al lanzar dos dados sea 7 u 11?
   h. ¿Se aplica la misma fórmula encontrada en el ejercicio de la actividad para empezar?, ¿por qué?
   i. ¿Cuántos elementos tiene el evento B^c "el resultado de la suma al lanzar dos dados no es 7 u 11"?
   j. ¿Cuántos elementos tienen en común el evento B^c "el resultado de la suma al lanzar dos dados no es 7 u 11" y el evento B "la suma al lanzar dos dados es 7 u 11"?
   k. ¿Cuál es el resultado de $P(B) + P(B^c)$?
   l. A partir del resultado anterior, ¿cómo calcularías la probabilidad del evento B^c "el resultado de la suma al lanzar dos dados no es 7 u 11", conociendo únicamente el resultado de la probabilidad del evento B "el resultado de la suma al lanzar dos dados es 7 u 11"?

Con la guía de su profesor, discutan las respuestas a las preguntas formuladas y lleguen a una conclusión común respecto a los eventos complementarios.

TIC

En el sitio electrónico siguiente puedes encontrar más información y ejercicios divertidos sobre este tema.
http://www.librosmaravillosos.com/acertijossamloyd/capitulo02.html (consultado el 17 de marzo de 2016).

HISTORIA DE LAS PALABRAS

En México, cuando la gente "echa un volado" con una moneda cualquiera, generalmente elige entre una de dos opciones, águila o sol. Actualmente, se siguen empleando ambos términos y, aunque las monedas emitidas en nuestro país tienen acuñada el águila, al reverso de la moneda no hay un sol. El sol apareció en monedas de 20 centavos que ya no están en circulación. Como en las monedas actuales aparece la efigie de personajes históricos, a veces se sustituye la expresión "sol" por la expresión "cara". De esta manera, al echar un volado, también se podrá preguntar: "¿Qué eliges, cara o águila?".

Reto

En un casino, la gente apuesta su dinero en los juegos de azar, esto significa que cuando una persona gana, el casino pierde. ¿Podrías explicar en qué consiste entonces el negocio de un casino de apuestas?

Tarea en casa

Se lanzan dos dados y se anota el resultado. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea 4 o 10?

PARA SABER MÁS

El mundo de las finanzas es un mundo de apuestas. Cuando una persona realiza una inversión en una institución financiera, está apostando con cierto riesgo, que se calcula con las leyes de la probabilidad.

Para los financieros, la probabilidad es "el valor fijo límite hacia el que tiende a aproximarse la frecuencia de aparición de un resultado cuando crece el número de observaciones que se realizan en circunstancias similares". Esto es lo que conocemos como probabilidad frecuencial.

En las instituciones de inversiones, los expertos se dedican a realizar mediciones sobre la frecuencia con que ocurren determinados fenómenos financieros. Los inversionistas recurren a estos estudios para analizar sus posibles acciones; por ejemplo, si consideran un estudio que muestra que una operación en la industria minera subirá 45%, esto significa que tiene 55 % de probabilidad de descender, lo que habla de mayor riesgo al momento de invertir. Éste es un caso de eventos complementarios.

PARA TERMINAR

Con la guía de tu profesor, reúnete con un compañero para desarrollar la actividad siguiente.

1. Se lanzan cuatro monedas y se anota el resultado de soles y águilas que aparecen.
2. Si se apuesta a que al menos aparecen dos soles, ¿cuál es la probabilidad de que aparezcan dos, tres o cuatro soles?
3. Listen en su cuaderno todos los posibles resultados que aparecen al lanzar las cuatro monedas.
   a. ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral del experimento?
   b. ¿Cuántos elementos tiene el evento "aparecen sólo dos soles"?
   c. ¿Cuál es la probabilidad del evento "aparecen sólo dos soles"?
   d. ¿Cuántos elementos tiene el evento "aparecen exactamente tres soles"?
   e. ¿Cuál es la probabilidad de que suceda el evento "aparecen exactamente tres soles"?
   f. ¿Cuántos elementos tiene el evento "aparecen cuatro soles"?
   g. ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado obtenido al lanzar cuatro monedas sea que aparezcan cuatro soles?
   h. ¿Se aplica la misma fórmula encontrada en el ejercicio de la actividad de lanzar dados?, ¿por qué?
   i. ¿Cuántos elementos tienen en común los eventos "aparecen sólo dos soles", "aparecen exactamente tres soles" y "aparecen cuatro soles"?
   j. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar las cuatro monedas aparezcan sólo dos soles o exactamente tres soles?, ¿cuál es la probabilidad del evento B de que al lanzar las cuatro monedas aparezcan sólo dos soles o exactamente tres soles o cuatro soles?
4. Si se le llama B^c al evento del resultado "aparecen menos de dos soles", a partir del resultado anterior, ¿cuál será la probabilidad $P(B^c)$?
5. Define cuál será el evento B a partir de B^c.
6. ¿Cuál es el resultado de $P(B) + P(B^c)$?

Con ayuda de su profesor, elijan al azar tres parejas y expongan sus resultados. Discutan, en grupo, el porqué de la solución. El profesor les confirmará las leyes de probabilidad a las que han llegado.

Autoevaluación

Lee en la primera columna los aspectos que vas a evaluar y marca con una equis (✗) el resultado que obtuviste de acuerdo con tu opinión. Luego intercambia tu libro con algún compañero para que te evalúe. Cuando te regrese el libro, revisa las diferencias entre lo que él opina y lo que tú registraste, y comenta con él aquellos aspectos en los que tengas dudas; esto te ayudará a darte cuenta de cuáles son los que deberás reforzar o volver a estudiar. Después, el profesor te apoyará a establecer las acciones necesarias para que avances en tu proceso de aprendizaje de los contenidos de la asignatura.

		Según mi opinión			Según la opinión de mis compañeros			Recomendaciones de mi profesor
		Sí	Aún tengo dudas	No	Sí	Aún tiene dudas	No	
Conocimientos y habilidades	Puedo explicar el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Puedo identificar las propiedades que se conservan.							
	Puedo resolver problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.							

Evaluación

Lee y contesta las preguntas como se indica en cada caso.

Patrones y ecuaciones

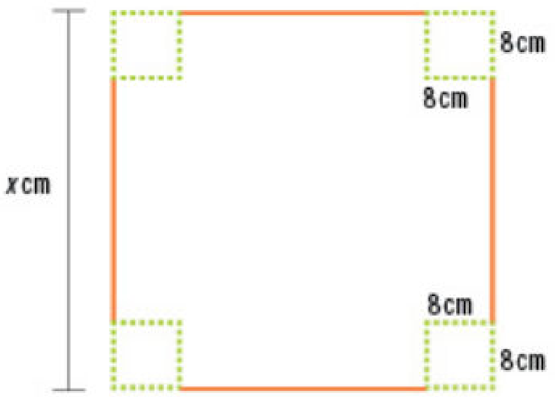
2.1 José quiere cercar una superficie rectangular de terreno de 16 000 m² para sembrar y protegerlo de los animales.

Para ello dispone de 3 000 m de alambre de púas, con el que puede cercar el terreno con tres hilos, sin que le sobre ni le falte material.

Evaluación

PREGUNTA 1 ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?

2.2 Antonio se encontró una pieza cuadrada de cartón rígido y decidió construir una caja sin tapa para colocar sus canicas. Para construirla recortó en cada una de las esquinas del cartón un pequeño cuadrado de 8cm de lado. El volumen final de la caja resultó ser de 650 cm^3.

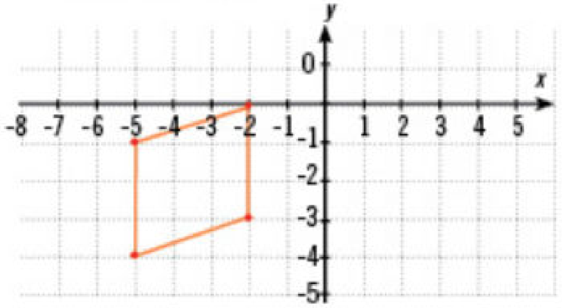


PREGUNTA 2 ¿Cuánto mide aproximadamente el área de la base?

a. 93 cm^2
b. 64 cm^2
c. 81 cm^2
d. 625 cm^2

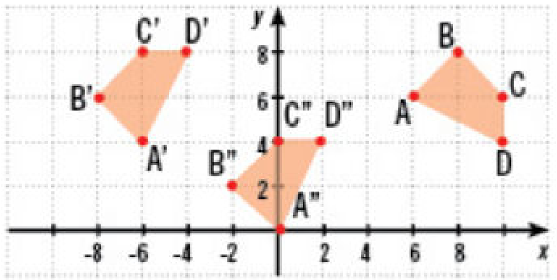
Figuras y cuerpos

2.3 En la imagen se muestra el resultado de transformar un pentágono por medio de la traslación $(x, y) \rightarrow (x-2, y-4)$ y una rotación de 270° respecto al origen.



PREGUNTA 3 ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos originales A, B, C y D?

2.4 En la imagen se han realizado una rotación y una traslación del cuadrilátero ABCD produciendo el polígono A", B", C", D".



PREGUNTA 4 ¿Cuál de los procesos siguientes corresponde con la imagen antes descrita?

a. $(x, y) \rightarrow (x-4, y+6)$ y una rotación de 90°

b. $(x, y) \rightarrow (x+6, y-4)$ y una rotación de 180°

c. $(x, y) \rightarrow (x+6, y-4)$ y una rotación de 90°

d. $(x, y) \rightarrow (x-6, y+4)$ y una rotación de 180°

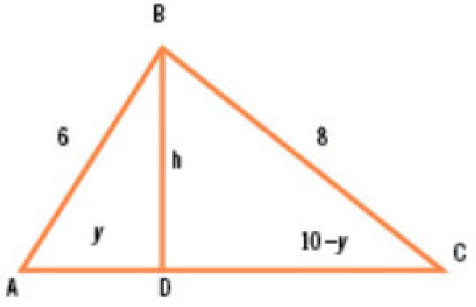
Medida

2.5 Dos lados de un triángulo miden $a=6$ y $b=8$.

PREGUNTA 5 ¿Cuánto debe medir el tercer lado para que sea un triángulo rectángulo?

a. 100
b. 10
c. 8
d. 5

2.6 Los lados del triángulo rectángulo ABC miden 6, 8 y 10, como se muestra en la imagen.



PREGUNTA 6 ¿Cuál es la longitud de $\overline{AD}$, $\overline{DC}$ y h?

Nociones de probabilidad

2.7 La imagen siguiente muestra un dado en forma de poliedro regular de cuatro caras (tetraedro).

Como se puede observar, sus cuatro caras son de colores diferentes: rojo, azul, verde y gris.

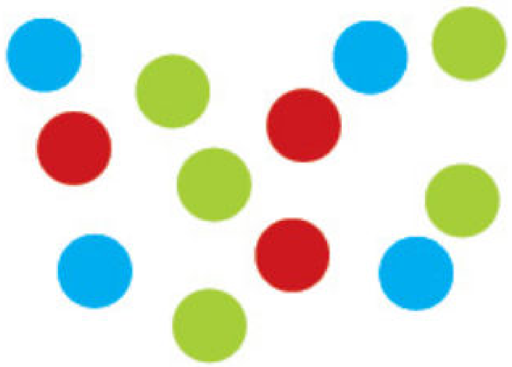
PREGUNTA 7 Si se lanza el dado, ¿cuál es la probabilidad de que la cara que quede sobre la superficie plana sea de color rojo?

PREGUNTA 8 ¿Cuál es la probabilidad de que no sea de color rojo?

PREGUNTA 9 ¿Cuál es la probabilidad de que sea de color verde o rojo?

PREGUNTA 10 ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral del experimento?

2.8 En una urna se colocan las bolas y se extrae una al azar.



PREGUNTA 11 ¿Cuál será la probabilidad de que la bola extraída sea azul o roja?

PREGUNTA 12 ¿Cuántos elementos tienen en común el evento "la bola extraída es azul" con el evento "la bola extraída es verde"?

BLOQUE 3

Aprendizajes esperados

Al finalizar este bloque, serás capaz de lo siguiente.

- Resolver problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.
- Resolver problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.

SEMANA	TEMA	SUBTEMA
EJE: SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO		
1	Patrones y ecuaciones	3.1 Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.
EJE: FORMA, ESPACIO Y MEDIDA		
2	Figuras y cuerpos	3.2 Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.
3		3.3 Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.
4		3.4 Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.
EJE: MANEJO DE LA INFORMACIÓN		
5	Proporcionalidad y funciones	3.5 Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.
6		3.6 Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.
7	Nociones de probabilidad	3.7 Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).
EVALUACIÓN		

Una tormenta eléctrica se desencadena por efecto de la distribución de las cargas eléctricas presentes en las nubes. Cuando se produce una tormenta eléctrica a veces se acompaña de lluvia, granizo, nieve. ¿Cómo calificarías a los eventos lluvia y relámpagos?, ¿ocurren de manera independiente o depende uno del otro? ¿Consideras que puede haber alguna manera de estimar la probabilidad de que ocurran descargas eléctricas cuando llueve?

SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO

LECCIÓN 1

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE IMPLICAN EL USO DE ECUACIONES CUADRÁTICAS. APLICACIÓN DE LA FÓRMULA GENERAL PARA RESOLVER DICHAS ECUACIONES

En nuestra vida diaria es fácil encontrarse con aplicaciones y problemas que requieren del uso de ecuaciones cuadráticas para solucionarlos; por ejemplo, tienen varias aplicaciones en la ingeniería y en el diseño; en la fabricación de lupas y lentes oftálmicos; en la estimación de tiempos de recorrido; en el cálculo de precios de mercancías, e incluso en la creación de obras artísticas.

Las ecuaciones son empleadas para calcular la distancia entre un objeto, la imagen y la lente.

- ¿Recuerdas qué es una ecuación cuadrática?
- ¿Qué métodos conoces para resolverlas?

PARA COMENZAR

Con la guía y apoyo de tu profesor desarrolla la actividad siguiente en parejas.

La longitud focal (f) en los lentes es la distancia a la que debe colocarse una lente para obtener una imagen nítida. Esta distancia está relacionada con las distancias entre el objeto y la lente (x) y entre la lente y la imagen que capta el ojo ($40 - x$).

La relación existente entre estas tres distancias es la siguiente.

$$\frac{1}{f} = \frac{x + (40 - x)}{x(40 - x)}$$

1. Si la lente de la figura tiene una longitud focal f = 8 cm, ¿a qué distancia deberá sostenerse para obtener una imagen nítida de la estampilla?
   a. ¿Cuál es la distancia entre la estampilla y el ojo del observador?
   b. ¿Qué relación tiene esa distancia con la distancia entre la estampilla y la lente?

Continúa...

2. Sustituyan el valor de la longitud focal dado en el punto 1 en la relación entre las tres distancias. Hagan las operaciones necesarias y escriban la expresión algebraica resultante en forma de una ecuación cuadrática.

3. Verifiquen que la expresión que obtuvieron corresponde a la forma de una expresión cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$. ¿Qué operaciones realizaron?
4. Intenten resolver la ecuación cuadrática que obtuvieron en el punto 3, con algunos de los métodos que vieron en lecciones anteriores. ¿Es posible hallar la solución?

Frecuentemente encontraremos ecuaciones cuadráticas que no son sencillas de descomponer en factores. Para estos casos hay que recurrir a la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado. Así, dada una ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ es posible hallar sus soluciones usando la fórmula:

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

5. Con esta información, resuelvan.
   a. ¿Cuáles son los valores de a, b y c de la ecuación cuadrática que obtuvieron?
   b. Sustituyan los valores en la fórmula general y resuelvan. ¿Cuáles son los valores de x que satisfacen la ecuación?
   c. ¿Cuáles son los valores de la distancia del lente a la estampilla?
   d. ¿Cuáles son los valores de la distancia del lente a la imagen que capta el ojo?
   e. ¿A qué distancia deberá sostenerse la lente para obtener una imagen nítida de la estampilla?

Con la ayuda de su profesor, comparen sus respuestas con el resto del grupo. Si hay diferencias, lleguen a consensos.

PARA SABER MÁS

De acuerdo con un importante teorema del algebra es posible escribir un polinomio a partir de conocer sus raíces (r) o soluciones de la manera siguiente.

$P(x) = (x - r_1)(x - r_2) \ldots (x - r_n)$

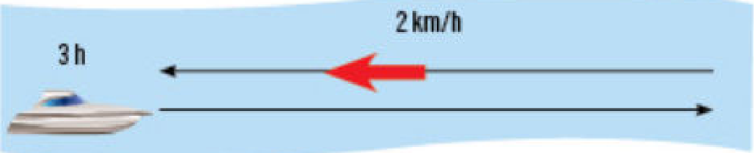
Por ejemplo, si las soluciones o raíces de una expresión cuadrática son: $r_1 = 2$ y $r_2 = 3$, entonces un polinomio que tiene esas soluciones será

$$P(x) = (x - 3)(x - 2) = x^2 - 5x + 6$$

Fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas

Con la guía de tu profesor, contesta y realiza lo que se plantea.

Una cooperativa turística de lanchas está planeando un recorrido turístico al Cañón del Sumidero estableciendo un tiempo programado de 3 horas. Su recorrido iniciará desplazándose río arriba a través de la contracorriente, aproximadamente a 2 km/h, para después realizar una maniobra de regreso al punto de partida. ¿A qué velocidad deberán desplazarse las lanchas para cumplir con el tiempo programado?



HISTORIA DE LAS PALABRAS

La palabra "raíz" proviene del latín "*radix*". En matemáticas se suele usar para denotar al número que multiplicado por sí mismo nos da nuevamente el número original. Así, 2 es raíz de 4 porque $2 \times 2 = 4$ y 3 es raíz cúbica de 27 porque $3 \times 3 \times 3 = 27$.

LECTURALIA

¿De dónde viene la palabra "álgebra"? Las respuestas a ésta y otras preguntas las encontrarás en el libro *Una historia de las matemáticas: retos y conquistas a través de sus personajes*, de Miguel A. Pérez.

PARA SABER MÁS

Desde la antigüedad existe un número que ha sido asociado con la estética y la belleza por matemáticos, geómetras, arquitectos, escultores o pintores. Se trata del número áureo, también conocido como razón o proporción áurea y que está representada por la letra griega ø. En general, se dice que un cuerpo está en proporción áurea si cumple lo siguiente.

$$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$$

1. Si la velocidad de la lancha es x, escribe una expresión matemática que represente la velocidad V_{subida}, a la que se desplazará la lancha río arriba.
2. Escribe una expresión matemática que represente la velocidad V_{bajada}, a la que se desplazará la lancha río abajo.
3. La velocidad de un móvil está dada por la relación siguiente.
$$\text{Velocidad} = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}$$
   a. ¿Cómo convertirías esta expresión para conocer el tiempo necesario para recorrer una distancia a cierta velocidad?
4. Aplica los cambios necesarios para convertir las expresiones de los puntos 1 y 2 y cumplir lo siguiente.
   a. Expresar el tiempo que toma llegar del punto de partida al punto de llegada.
   b. Expresar el tiempo que toma regresar del punto de llegada al punto de partida.
5. Si los tiempos de recorrido suman 3 horas, anota la expresión matemática que representa al problema.
   a. ¿Qué operaciones debes realizar a la expresión para "quitar" los denominadores $(x+2)$ y $(x-2)$?
6. Realiza los productos indicados para expandir la expresión.
7. Resuelve la expresión cuadrática.
   a. ¿A qué velocidad deberán desplazarse las lanchas para cumplir con el tiempo programado?
   b. ¿Cuánto tiempo tomará la primera mitad del recorrido?
   c. ¿Cuánto tiempo llevara hacer la segunda mitad del recorrido?

Reto

Bajo la supervisión de tu profesor desarrolla esta actividad en parejas.

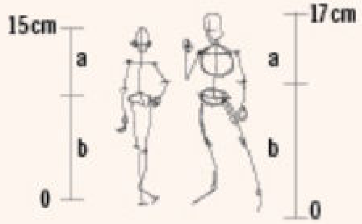
Un taller en Chignahuapan, Puebla, fabrica durante todo el año esferas navideñas. De acuerdo con un estudio de mercado se determinó que la demanda de cajas de esferas está relacionada con el precio de venta de la manera siguiente.

$$D(x) = 22\,000 - 50\,x$$

1. Si x representa el precio de venta de una caja de esferas, ¿cuántos artículos se espera vender si los precios son los siguientes?
   a. $x = \$40$
   b. $x = \$45$
2. El ingreso obtenido por la venta de las esferas está dado por la relación
$$I(x) = (\text{demanda de cajas})\,(\text{precio de cajas})$$
   a. Escriban la ecuación cuadrática que representa el ingreso por la venta.
3. Si se desea obtener un ingreso de \$499 000,
   a. ¿cuál es el precio al que se deben vender las cajas?,
   b. ¿cuántas cajas deben venderse?

PARA RESOLVER

1. Resuelve las ecuaciones cuadráticas usando la formula general.
   a. $x^2+10x+25=0$
   b. $2x^2+10x-48=0$
   c. $-3x^2+6x+9=0$
   d. $2x^2+\frac{1}{15}x-\frac{1}{15}=0$
   e. $-8x^2+8x-28=0$
2. Un dibujante de comics está diseñando el boceto de dos superhéroes. Si la heroína mide 15 cm de estatura y el héroe 17 cm, considerando que la proporción áurea es $\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$, ¿a qué distancia deberá estar el ombligo de sus respectivos dibujos para ser referencia del resto del boceto?



Con la guía de tu profesor, analiza el procedimiento que seguiste para resolver las ecuaciones y el problema.

PARA TERMINAR

Con la guía de tu profesor, reúnete con un compañero y resuelve lo que se indica.

En la figura 1 se muestra un rectángulo cuyo largo mide 1 unidad y su ancho x unidades. Con ayuda de un compás y una regla se ha dibujado un cuadrado de lado x sobre el rectángulo, tal y como se observa en la figura 2.

Figura 1

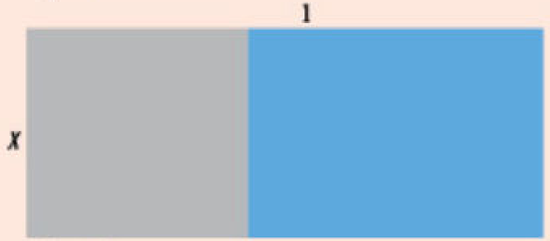


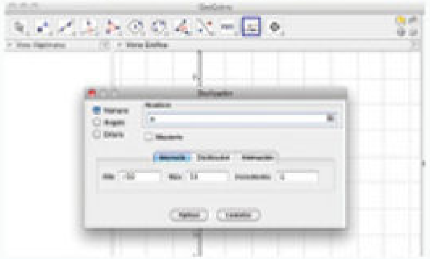
Figura 2

1. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa al ancho del rectángulo azul de la figura 1?
2. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa al largo del rectángulo azul de la figura 2?
3. Establezcan la proporción entre los lados del rectángulo más grande y los del rectángulo.
$$\frac{x}{1}=\frac{}{x-1}$$
4. Considerando su resultado, exprésenlo como una ecuación de segundo grado de la forma ax^2+bx+c.
5. A la raíz o solución positiva de la expresión anterior se le conoce como letra griega ϕ. ¿Cuál es el valor aproximado de este número?
6. Al rectángulo que cumple la proporción se le conoce como rectángulo áureo. Dibújenlo en sus cuadernos.

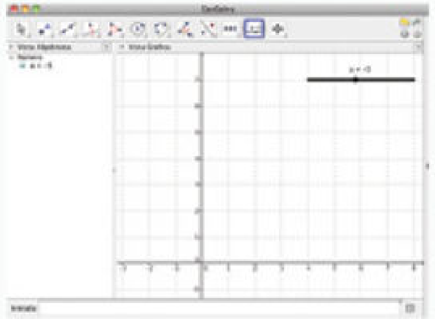
TIC

Realiza la actividad siguiente utilizando el *software* de geometría dinámica GeoGebra.

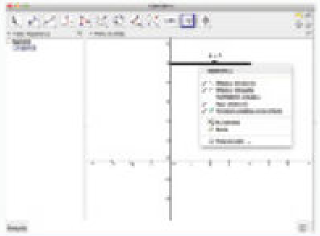
1. Crea un deslizador a utilizando la herramienta **Deslizador**, haciendo clic sobre el lugar donde deseas colocarlo. Enseguida se mostrará un cuadro de diálogo. En los recuadros de la pestaña **Intervalo** escribe los valores: **Min: –50, Máx: 50, Incremento: 1**



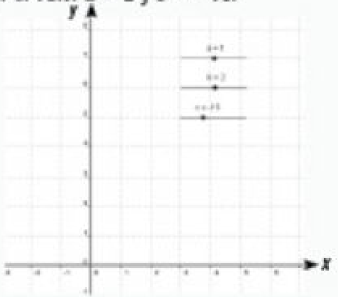
2. Al oprimir el botón **Aplica** aparece el deslizador creado para el parámetro a.



3. Repite el paso anterior para crear los deslizadores **b** y **c**. Para colocarlos, haz clic derecho sobre los deslizadores y desactiva el menú alternativo con el comando **Fijar el objeto**. Arrastra el deslizador hasta la posición deseada. Para dejarlos fijos nuevamente, haz clic derecho sobre los deslizadores y elige el comando **Fijar el objeto**.



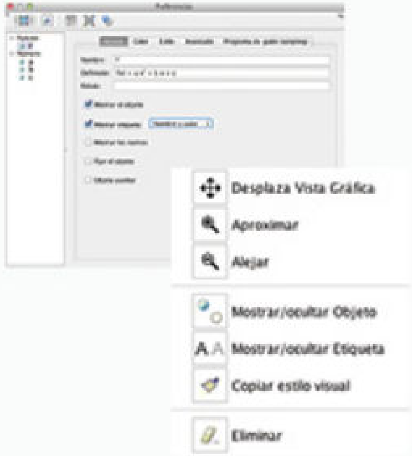
4. Haz clic sobre el punto que se encuentra sobre el deslizador a y muévelo hacia la derecha o izquierda según sea necesario para fijar el valor de **a = 1**. Repite el procedimiento para fijar el valor **b = 2** y **c = –15**.



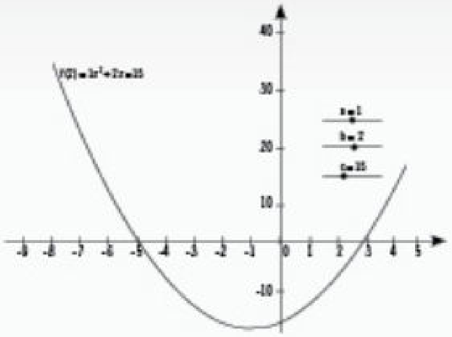
5. Escribe **a*x^2+b*x+c** en el cuadro **Entrada**, que está en la parte inferior. Haz clic sobre la tecla **Enter**.

Entrada: a*x^2+b*x+c

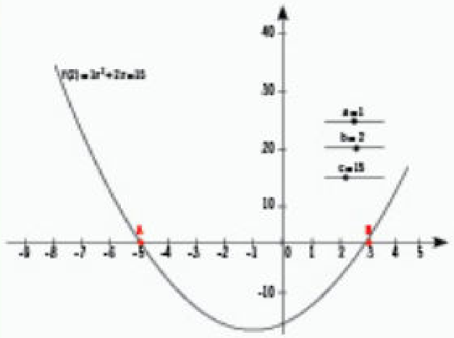
6. Observa la gráfica mostrada; puedes ajustar el *zoom* oprimiendo las opciones **Alejar** o **Acercar** para tener una mejor visión. Haz clic derecho sobre la curva y abre la opción **Propiedades del objeto**. En la sección **Muestra rótulo** o **Etiqueta**, según la versión de GeoGebra, selecciona **Nombre** y **Valor**.



7. Al cerrar la ventana de diálogo aparece la función. Nota que la gráfica corresponde a la expresión $x^2+2x-15$.



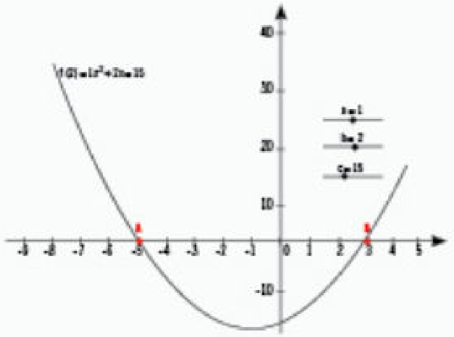
8. Elige la herramienta **Intersección entre dos objetos.** Haz clic sobre la parábola y después sobre el eje *x*. Aparecerán los puntos de las intersecciones entre el eje *x* y la parábola. Observa las coordenadas de los puntos A y B. ¿Cuánto vale la coordenada *x*?, ¿cuánto vale la coordenada *y*?



9. Para saberlo, resuelve la ecuación utilizando la fórmula general de ecuaciones de segundo grado.

$$x^2+2x-15=0$$

¿Qué relación tienen sus soluciones con los puntos A y B de la gráfica?



10. Fija ahora los deslizadores a los valores **a = 1**, **b = 6** y **c = 9**. Observa las coordenadas de los puntos A y B. ¿Cuánto vale la coordenada *x* en cada caso?, ¿cuánto vale la coordenada *y*? Resuelve la ecuación cuadrática $x^2+6x+9=0$. ¿Cuáles son sus raíces?, ¿qué relación tiene con los puntos de intersección A y B?

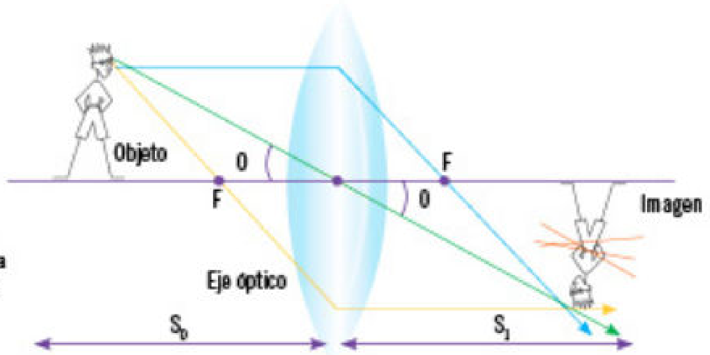
11. Fija ahora los deslizadores a los valores **a = 1**, **b = 0** y **c = 1**. Observa las coordenadas de los puntos A y B. ¿Cuánto vale la coordenada *x* en cada caso?, ¿cuánto vale la coordenada *y*? Resuelve la ecuación cuadrática $x^2+1=0$. ¿Cuáles son sus raíces?, ¿qué relación tiene con los puntos de intersección A y B?

LECCIÓN 2

APLICACIÓN DE LOS CRITERIOS DE CONGRUENCIA Y SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

La geometría es una herramienta fundamental para analizar y comprender nuestro entorno. Desde épocas muy antiguas, ha permitido descubrir la naturaleza y propiedades de fenómenos físicos; por ejemplo, el comportamiento de los rayos de luz y las ondas sonoras. Desde entonces se ha reconocido el potencial de la geometría en muchos ámbitos más, como el desarrollo de métodos para medir distancias entre dos objetos inaccesibles; por ejemplo, cuánto mide el ancho de un río, un barranco o un cañon. Incluso se pudieron diseñar instrumentos que permitían realizar cálculos con base en principios geométricos, como el compás militar de Galileo Galilei.

- ¿Cómo crees que se utilizó la geometría para fabricar estos instrumentos?
- ¿Puedes idear una forma de medir indirectamente la altura del asta bandera de tu escuela?

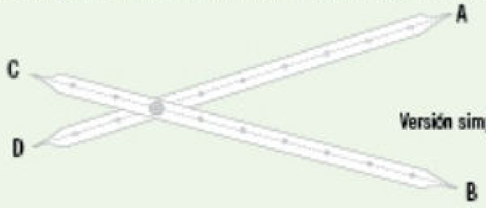


El estudio de las propiedades de lentes y espejos se aborda desde la óptica geométrica, que representa a la luz como rayos.

PARA COMENZAR

Reúnete con un compañero para desarrollar la actividad.

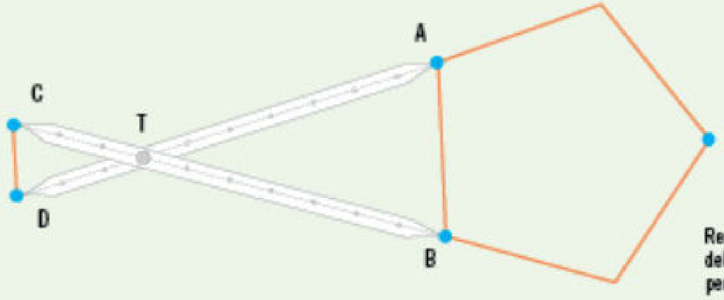
Galileo Galilei, además de ser astrónomo, matemático y físico, fue también un gran inventor. Entre algunos otros instrumentos, se le atribuye la creación del compás de reducción que se utiliza hasta nuestros días para convertir segmentos de rectas de una escala a otra. El instrumento está formado por dos regletas graduadas unidas entre sí por un tornillo.



Versión simplificada del compás de reducción.

Continúa...

La forma de utilizarlo es muy sencilla. Se desatornillan las regletas, se selecciona la escala de conversión deseada, donde cada marca en la regleta equivale a una medida dada, y se vuelven a unir. Posteriormente, se colocan las puntas A y B sobre el segmento a transformar y el nuevo segmento se traza uniendo los puntos señalados por las puntas C y D.



Representación gráfica del empleo del compás para trazar un pentágono a escala inferior.

1. Considerando la información anterior, respondan las preguntas en su cuaderno.
   a. Analicen la representación gráfica del empleo del compás. ¿Cuántos triángulos pueden identificar?, ¿cuáles son?
   b. ¿Cómo están relacionados estos triángulos?, ¿comparten algún componente?
   c. ¿Los triángulos son semejantes o congruentes? Expliquen por qué, enunciando el criterio de semejanza o congruencia que hayan utilizado.
   d. ¿Cuál es la razón entre los lados de los triángulos que identificaron? Supongan que la distancia entre las marcas es de 1 cm.
   e. Si cada marca equivale a 1 cm, ¿cuál es la proporción que se ha aplicado a $\overline{AB}$?
   f. Si $\overline{AB}$ mide 3 cm, ¿cuánto medirá $\overline{CD}$?
   g. ¿Cómo se puede explicar el funcionamiento del compás de reducción?
   h. ¿Servirá para trazar un segmento a una escala mayor?, ¿por qué? Describan los pasos que seguirían para utilizarlo de esta manera.

Con ayuda de su profesor, compartan sus respuestas con otras parejas. Si sus resultados no coinciden, revisen sus explicaciones y determinen a qué se deben las diferencias.

PARA SABER MÁS

La relación entre los criterios de congruencia y semejanza entre dos triángulos se establece atendiendo a las definiciones de cada concepto.

Dos triángulos son congruentes si cumplen las condiciones siguientes.

- Tienen dos lados y el ángulo entre ellos iguales (LAL).
- Tienen un lado igual y respectivamente iguales los ángulos adyacentes (ALA).
- Tienen los tres lados respectivamente iguales (LLL).

Dos triángulos son semejantes si cumplen las condiciones siguientes.

- Tienen dos ángulos respectivamente iguales (AA).
- Tienen dos lados proporcionales e igual el ángulo comprendido entre ellos (LAL).
- Sus tres lados correspondientes son proporcionales entre sí (LLL).

Del análisis de estos criterios se desprende que los triángulos congruentes son idénticos en forma y dimensiones, mientras que los triángulos semejantes son una ampliación o reducción de uno respecto al otro.

Congruencia y semejanza mediante el compás de reducción

AFORISMOS

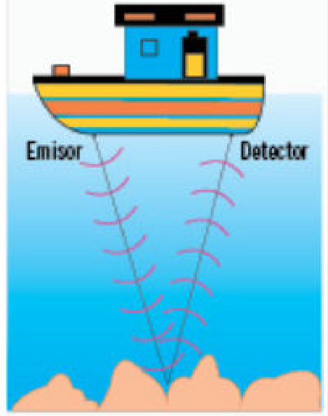
"Duda de los datos hasta que los datos no dejen lugar a dudas."

Henri Poincaré (1854 - 1912), físico y matemático francés.

¿Qué consideras que Poincaré quiso decir con esta frase?, ¿cómo la podrías aplicar en tu quehacer matemático?

PARA SABER MÁS

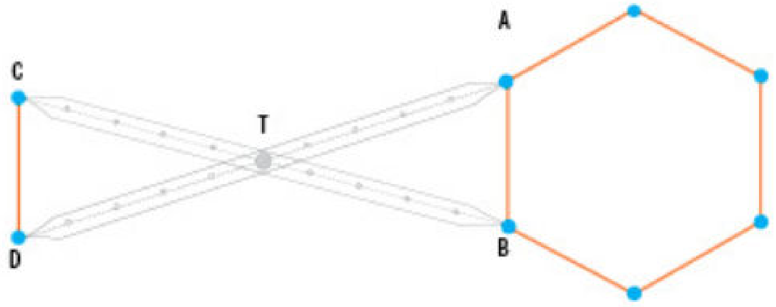
Las ondas sonoras, al igual que los rayos de luz, al incidir sobre una superficie plana, se reflejan con el mismo ángulo con el que incidieron. Este fenómeno es muy utilizado en los barcos para medir la profundidad del río sobre el cual se está navegando.



Reflexión de una onda sonora.

La ley de reflexión establece que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

Considera ahora que las regletas se separaron y se han colocado en la posición que se muestra enseguida.



1. Analiza la imagen y responde las preguntas en tu cuaderno.
   a. ¿Cuántos triángulos puedes identificar en las regletas?, ¿cuáles son?
   b. ¿Cómo están relacionados estos triángulos?, ¿comparten algún componente?
   c. ¿Los triángulos son semejantes o congruentes? Explica por qué, enunciando el criterio de semejanza o congruencia que has utilizado.
   d. ¿Cuál es la razón entre los lados de los triángulos que identificaste? Supón que la distancia entre las marcas es de 2 cm.
2. Si cada marca equivale a 2 cm, ¿cuál es la proporción que se ha aplicado a $\overline{AB}$?
3. Si $\overline{AB}$ mide 6 cm, ¿cuánto medirá $\overline{CD}$?
4. Con el compás traza un segmento a una escala mayor.

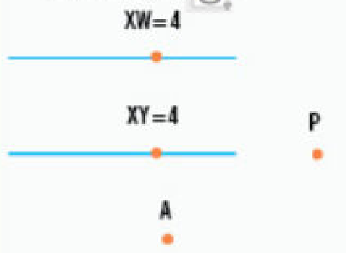
Con ayuda del profesor, verifica tus respuestas con alguno de tus compañeros. Si sus resultados no coinciden, revisen sus explicaciones y determinen a qué se deben las diferencias.

TIC

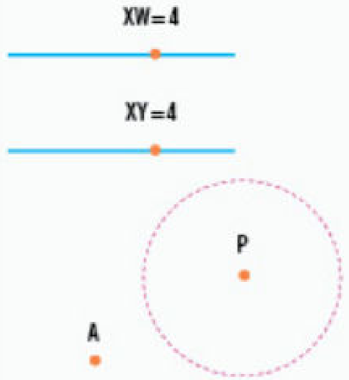
Realiza la construcción de un pantógrafo, utilizando el *software* de geometría dinámica GeoGebra.

1. Con la herramienta **Deslizador** crea los deslizadores **XW** y **XY**. Elige para ambos deslizadores un valor mínimo de 1 y un valor máximo de 6.

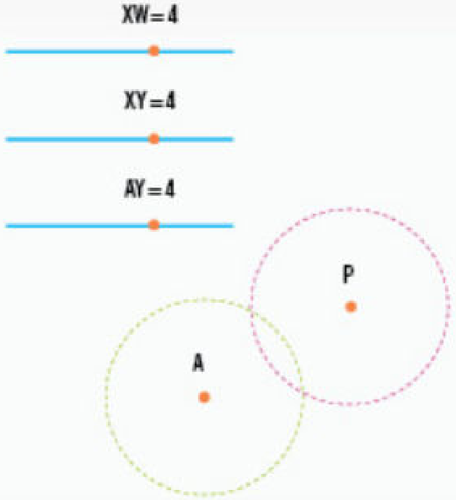
2. Traza una circunferencia con centro en P y radio XW con ayuda de la herramienta **Circunferencia dado centro y radio**.



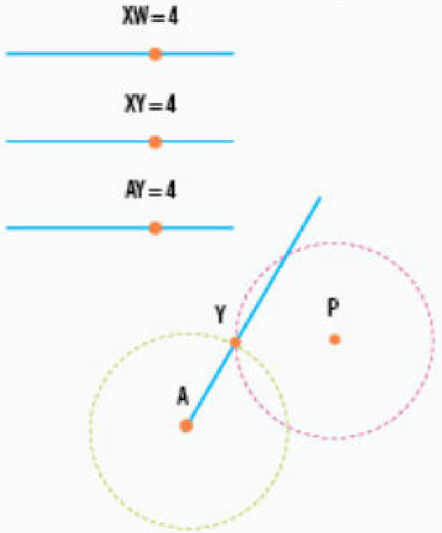
3. Con la ayuda de la herramienta **Deslizador** crea el deslizador **AY**. Elige un valor mínimo de 1 y un valor máximo de 6.



4. Traza ahora una circunferencia con centro en A y radio AY.

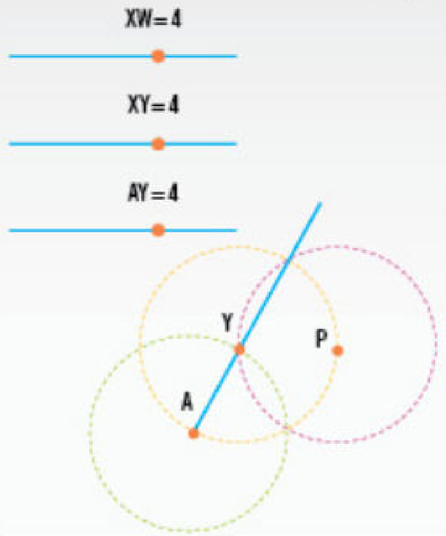


5. Marca el punto de intersección entre las dos circunferencias con ayuda de la herramienta **Punto de intersección**. Renombra el punto C por Y y traza la semirrecta que pasa por los puntos A y Y usando la herramienta **Semirrecta**.

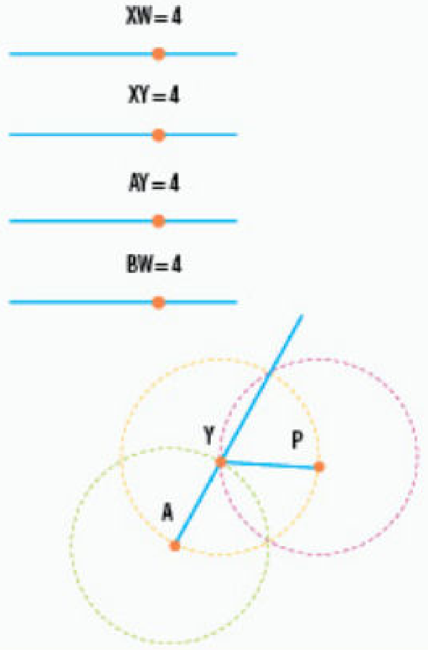


Continúa...

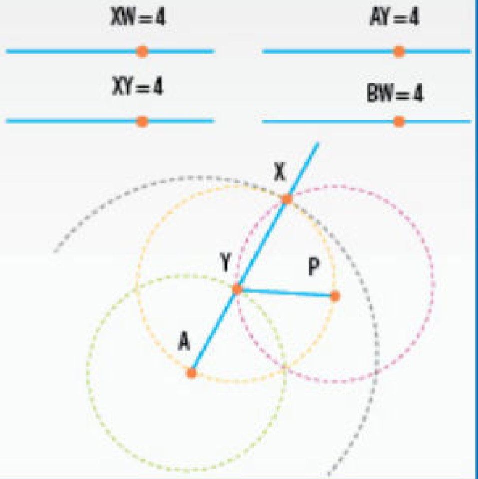
6. Traza una circunferencia con centro en Y y radio XY con ayuda de la herramienta **Circunferencia dado Centro y Radio**.



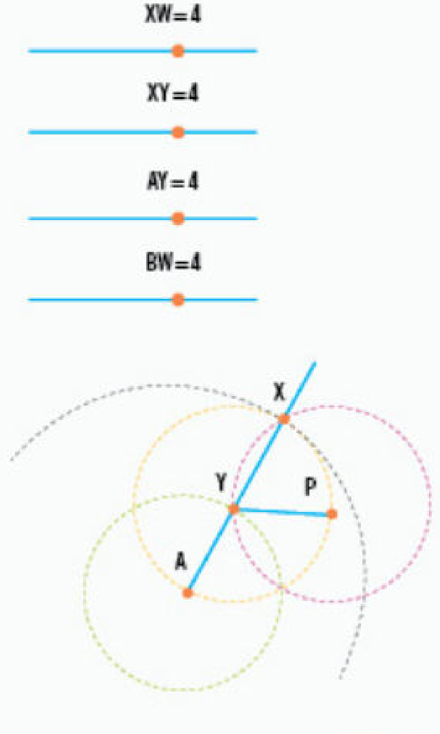
7. Con la ayuda de la herramienta **Deslizador** crea el deslizador BW. Elige un valor mínimo de 1 y un valor máximo de 6. Traza el segmento de recta entre los puntos Y y P usando la herramienta **Segmento entre Dos Puntos**.



8. Traza una circunferencia con centro en A y radio XY + AY con ayuda de la herramienta **Circunferencia dado Centro y Radio**. Marca la intersección entre las tres circunferencias y renombra el punto como X.

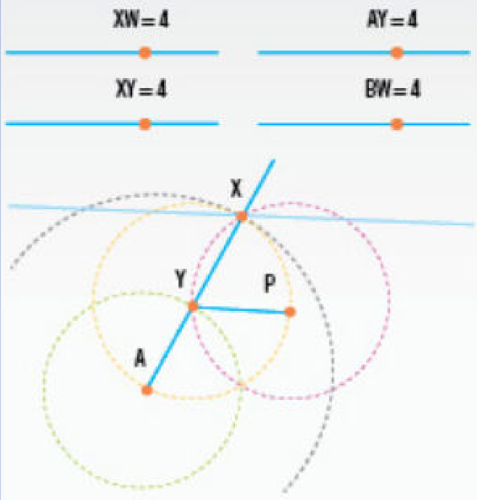


9. Traza un segmento entre los puntos A y X, usando la herramienta **Segmento entre Dos Puntos**.

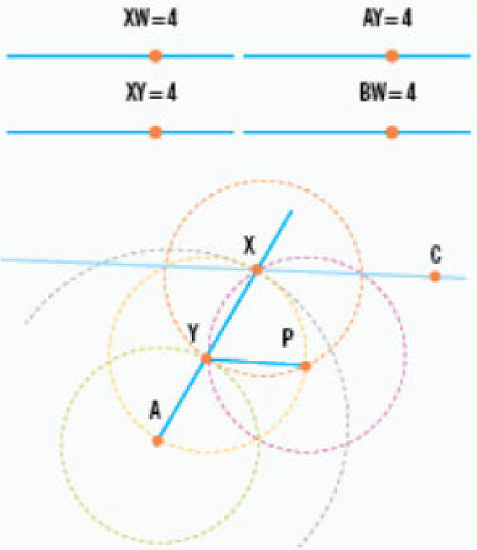


Continúa...

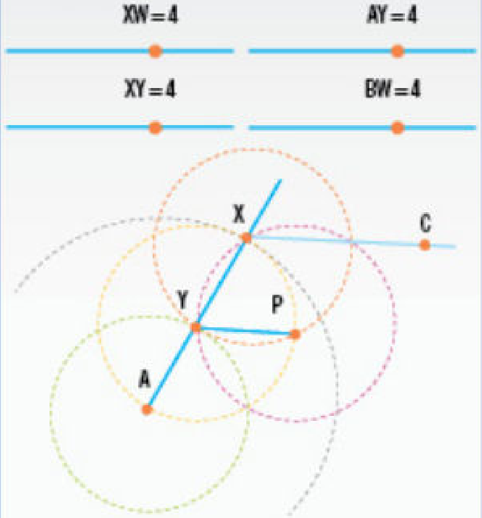
10. Traza una recta paralela a YP que pase por el punto X con la herramienta **Recta paralela**.



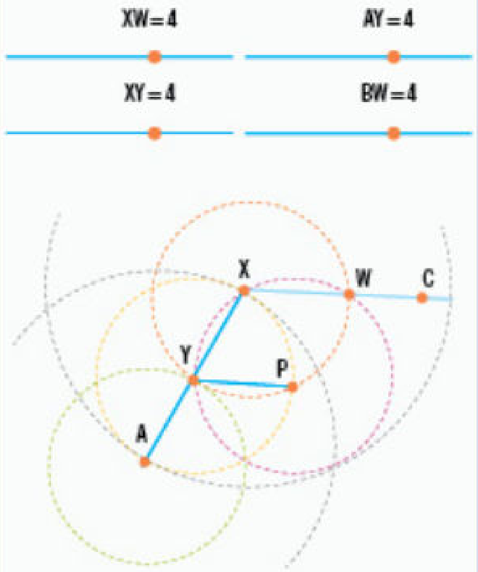
11. Traza una circunferencia con centro en X y radio XW con ayuda de la herramienta **Circunferencia dado Centro y Radio**. Traza el punto C sobre la recta paralela usando la herramienta **Punto**.



12. Oculta la semirrecta que pasa por los puntos A y X, y la recta que pasa por los puntos X y C. Traza una semirrecta que pase por los puntos X y C.

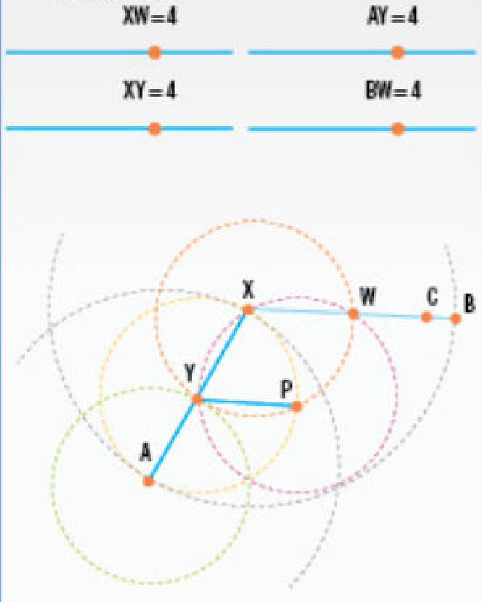


13. Marca el punto de intersección W y traza una circunferencia con centro en X y radio XW + BW, auxiliándote de la herramienta **Circunferencia dado Centro y Radio**.

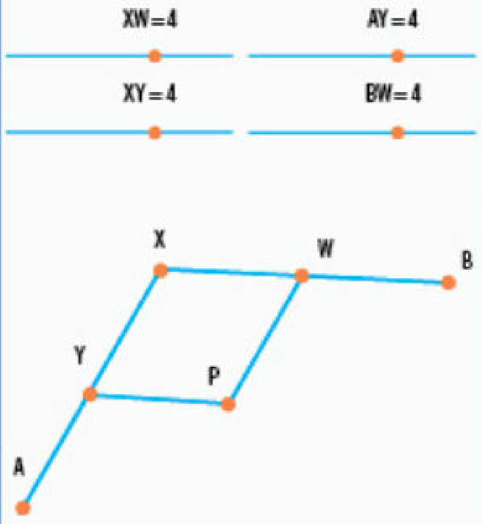


Continúa...

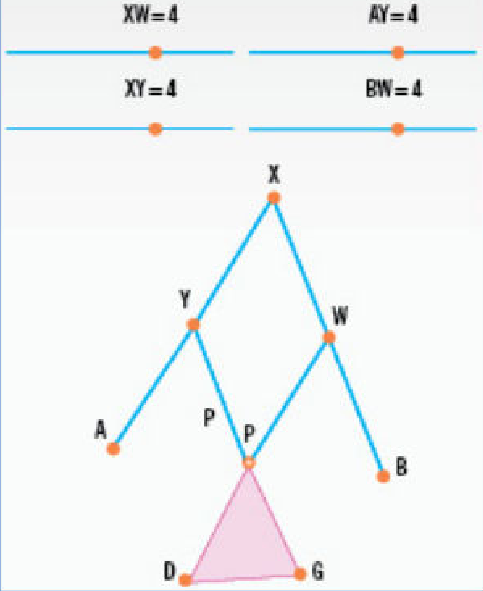
14. Marca la intersección entre la semirrecta que pasa por los puntos X y C, y la circunferencia correspondiente con el punto B. Traza el segmento XC.



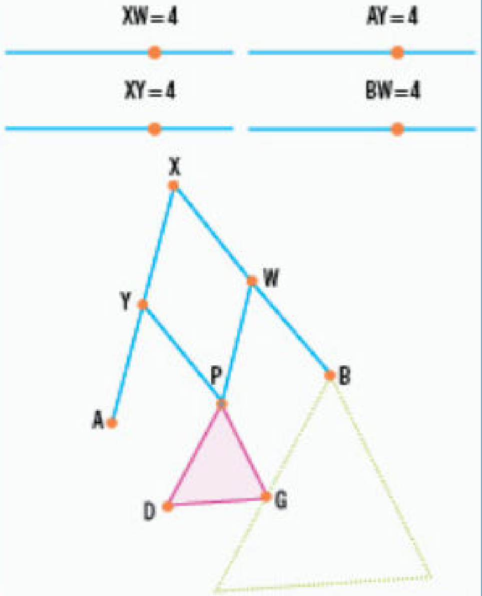
15. Traza el segmento PW y oculta los trazos auxiliares.



16. Traza un triángulo utilizando la herramienta **Polígono**. Adosa el punto P al polígono usando la herramienta **Adosa o libera punto**, haciendo clic dentro del triángulo .



17. Activa el rastro del punto B, haciendo clic secundario sobre él y eligiendo la opción **Activar rastro** del menú contextual. Desplaza el punto B sobre el perímetro del triángulo. Observa lo que sucede.



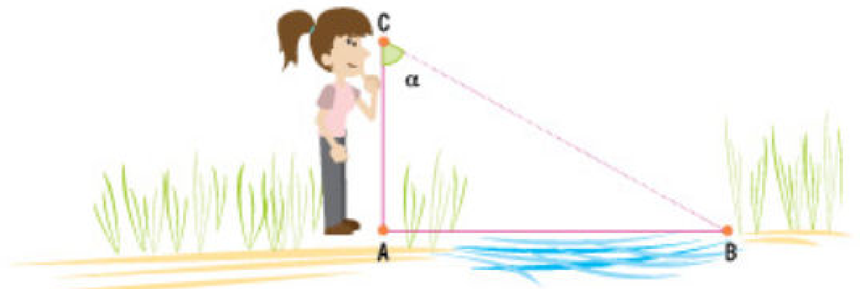
REFLEXIONA

Con base en la construcción que acabas de realizar, contesta las preguntas.

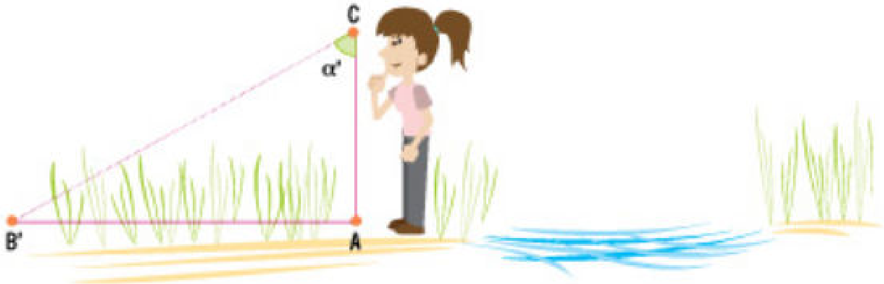
1. ¿En qué proporción está trazado el triángulo descrito por el punto B en comparación con el triángulo original?
2. ¿Cómo afecta mover los deslizadores XW, XY, AY y BW en la figura resultante?
3. ¿Qué valores debes elegir en los deslizadores para ampliar el triángulo tres veces?
4. Describe con tus palabras el funcionamiento del pantógrafo. ¿En qué principio geométrico se basa su funcionamiento?, ¿por qué funciona de esta manera el dispositivo? Presta atención a la forma del instrumento, ¿puedes observar triángulos en él?

Congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas

Tales de Mileto, matemático y astrónomo griego (650 a.n.e.- 546 a.n.e.), ideó un método peculiar para medir distancias a lugares inaccesibles; por ejemplo, el ancho de un río. Primero, debemos colocarnos cerca de la orilla del río elegido y mirar hacia un punto en la rivera opuesta, como se ilustra enseguida.



A continuación, debemos girar en sentido opuesto manteniendo la misma inclinación en la mirada, como se ilustra en la imagen.



En este momento debemos fijar la mirada sobre un punto en particular. Con ayuda de una segunda persona o de un punto de referencia se mide la distancia de los pies del observador hasta el punto indicado. Ésta será la medida del ancho del río.

HISTORIA DE LAS PALABRAS

La palabra "cámara" proviene del latín "*camera*" que significa "cuarto" o "habitación". El físico y matemático Johannes Kepler acuñó el término "cámara oscura" en su tratado *Ad Vitellionem paralipomena* para referirse a un cuarto cerrado por todos sus lados, excepto por un pequeño agujero en una de sus paredes. En la pared opuesta a este orificio se forma una imagen invertida de lo que se encuentre enfrente.

1. Traza en tu cuaderno un diagrama donde se muestren los dos triángulos involucrados en el método.
   a. ¿Qué tipo de triángulos son?
   b. ¿Tienen algún elemento en común?, ¿cuál o cuáles?
   c. ¿Cómo son los dos triángulos? Argumenta tus afirmaciones, menciona los criterios que utilizaste.
   d. ¿Por qué las distancias $\overline{AB}$ y $\overline{AB'}$ son iguales?

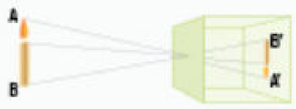
2. Explica brevemente por qué funciona el método y cuáles serían los posibles inconvenientes en una situación real.

Con ayuda de tu profesor, comparte tus respuestas con otro compañero. Si sus resultados no coinciden, revisen sus explicaciones y determinen a qué se deben las diferencias.

PARA SABER MÁS

Una cámara oscura o estenopeica es un dispositivo construido a partir de una pequeña caja de madera, con un orificio en una de sus caras. Este orificio funciona como una lente (convergente) que forma una imagen sobre la cara anterior de la caja, como se ilustra en la imagen.

Este instrumento fue el precursor de las cámaras fotográficas. Actualmente, algunos artistas todavía hacen uso de estas cámaras, colocando en la cara posterior película convencional de 35 × 24 mm para capturar imágenes, obteniendo con ello un peculiar efecto.

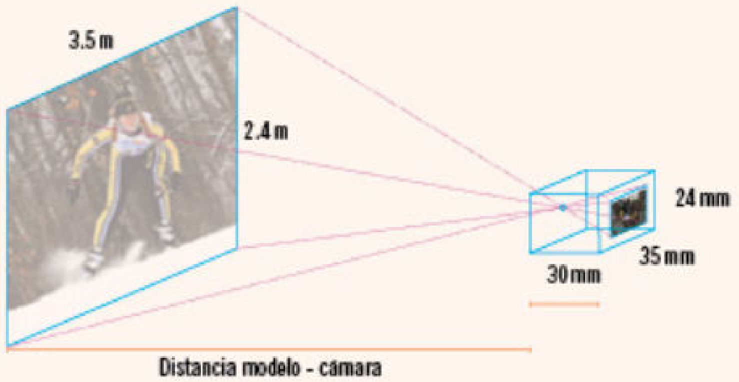


PARA RESOLVER

Lee con atención y contesta las preguntas del problema.

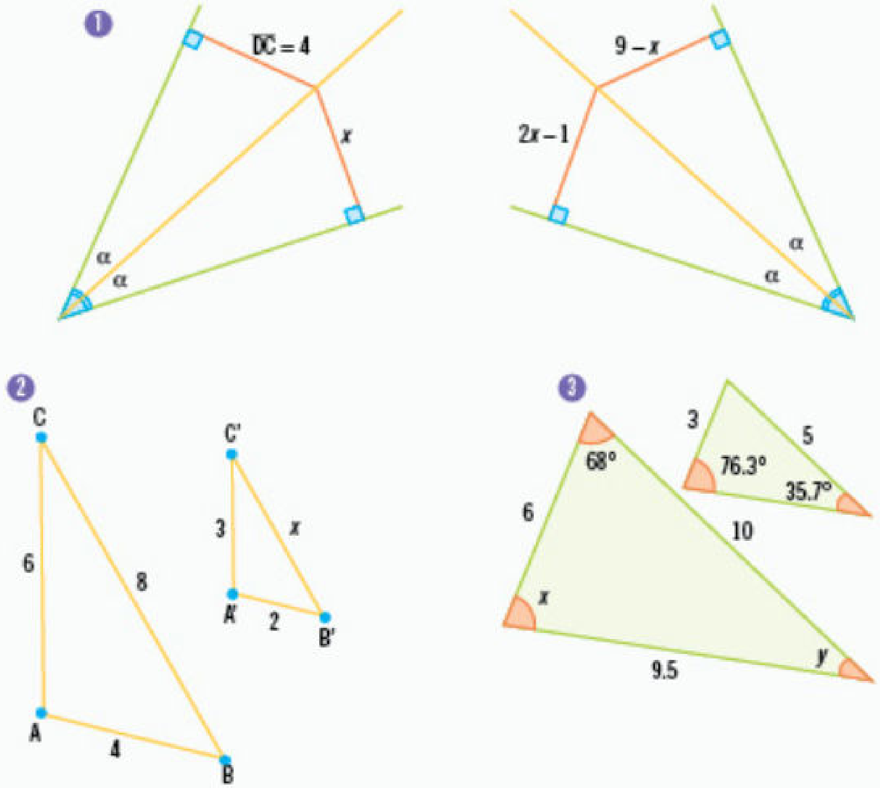
Un artista ha diseñado su propia cámara oscura y desea tomar una fotografía de una modelo en un set. Si las dimensiones del set son 3.5 × 2.4 m y la distancia entre el orificio de la cámara y la película es de 30 mm, como se ilustra enseguida, ¿a qué distancia deberá colocarse la cámara para capturar toda la imagen?

Con la guía de tu profesor, analiza tu respuesta y con su ayuda ecribe una justificación.



Tarea en casa

Determina si los triángulos siguientes son congruentes o semejantes y encuentra el valor de sus lados desconocidos. Argumenta tus respuestas.



PARA TERMINAR

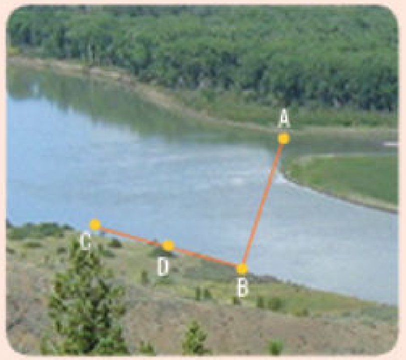
Existe otro método para medir la distancia entre dos puntos inaccesibles. Sigue las indicaciones y averígualo.

A continuación se ilustran los pasos a seguir para determinar la distancia entre los extremos de un río, denotada por el segmento de recta AB.

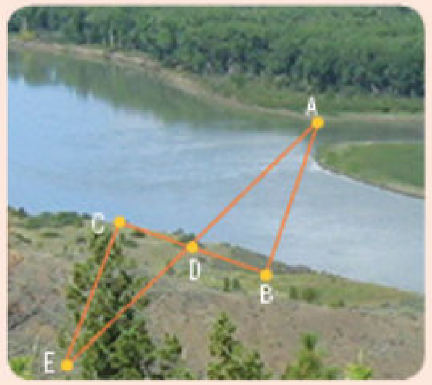
- El observador se sitúa en una de las orillas del río (punto B) e identifica a un objeto situado en la otra orilla del río (punto A).

Continúa...

- El observador entonces gira 90° hacia su izquierda y camina una distancia arbitraria hasta el punto C.
- Seguido de esto, coloca una marca en el punto medio de $\overline{BC}$ (punto D).



- Nuevamente, el observador debe girar 90° desde el punto C hacia su izquierda y empezar a caminar hasta que al voltear observe la marca D alineada con el objeto de referencia al otro lado del río (punto A).



- Finalmente, se mide la distancia $\overline{CE}$, ésta es el largo que mide el río.

1. Con base en los pasos que se describieron antes, contesta las preguntas en tu cuaderno.
   a. ¿Qué figuras geométricas identificas en la última imagen?
   b. ¿Tienen elementos comunes?, ¿cuáles?
   c. ¿Cómo son los ángulos internos del triángulo ABD respecto a los ángulos internos del triángulo ECD? Argumenta tu respuesta.
   d. ¿Cómo son los lados del triángulo ABD respecto a los del triángulo ECD? Argumenta tu respuesta.
   e. Explica por qué $\overline{CE}$ mide lo mismo que $\overline{AB}$.
   f. Describe brevemente por qué funciona el método y en qué principio geométrico está basado.

Con ayuda del profesor, comparte tus respuestas con otro compañero. Si sus resultados no coinciden, revisen sus explicaciones y determinen a qué se deben las diferencias.

LECCIÓN 3

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS MEDIANTE EL TEOREMA DE TALES

La arquitectura y la ingeniería civil se apoyan en el uso de la geometría para trazar a escala los planos de un proyecto e incluso para estimar las medidas que deberán tener ciertos componentes de una construcción. Muchos de los instrumentos que se utilizan para trazar planos y realizar dibujos técnicos basan su funcionamiento en conceptos geométricos; por ejemplo, en el compás militar o geométrico.

- ¿Cómo construirías una escala de 7:9 para trazar un dibujo?
- ¿Qué instrumentos geométricos utilizarías?

PARA COMENZAR

Lee el texto y realiza lo que se te indica.

Cuando se realizan dibujos técnicos con frecuencia se utilizan diferentes escalas; por ejemplo, la escala 7:9, en la cual 7 unidades en el dibujo equivalen a 9 unidades reales. ¿Cómo construirías esta escala? Una manera de hacerlo es la siguiente: sobre un segmento rectilíneo se marca un segmento AB de longitud 7 cm que representará la medida del dibujo. A continuación se traza un segmento auxiliar AC de 9 cm sobre el que se hacen nueve marcas separadas entre sí por 1 cm, como se muestra en la figura.

Representación gráfica del método para la construcción de escalas.

1. Copia en tu cuaderno la figura y, a continuación, realiza lo que se te solicita.
   a. Traza un segmento que una las dos marcas extremas de los dos segmentos ($\overline{BC}$).
   b. Con ayuda de una escuadra y una regla, traza rectas paralelas al $\overline{BC}$ que pasen por cada una de las marcas del auxiliar $\overline{AC}$.
      - ¿Cuánto mide cada marca sobre $\overline{AC}$?
      - ¿Cuál es la razón entre los segmentos cortados por las rectas paralelas?, ¿tienen la misma razón?
      - ¿Cómo son los segmentos cortados por las rectas paralelas?
2. Si desearas construir una escala de $\frac{8}{3}$, ¿cómo procederías? Constrúyela en tu cuaderno.

Con la guía de tu profesor, compara tus respuestas con las de tus compañeros. Si hay diferencias, analicen a qué se debieron y corrijan lo que sea necesario.

MATEMÁTICAS HISTÓRICAS

De acuerdo con la historia, Tales de Mileto fue el primero en predecir con exactitud un eclipse de Sol, el cual ocurrió el 28 de mayo de 585 a.n.e.; sin embargo, no se sabe con precisión cómo fue que pudo predecirlo. Lo que sí sabemos es que fue un prodigioso geómetra y matemático. Uno de los teoremas que se le atribuyen es el siguiente: "Si tres o más paralelas son cortadas con dos transversales, la razón de las longitudes determinadas en una de las paralelas es igual a la razón de las longitudes de los segmentos correspondientes, determinados por las otras paralelas".

Fuente: Centro Virtual de Divulgación de las Matemáticas.

Problemas geométricos

El compás geométrico

Galileo Galilei diseñó y utilizó un instrumento llamado compás geométrico o compás militar, como se muestra en la imagen.

Versión simplificada de un compás geométrico o militar.

1. Analiza la figura 1. Para utilizar el instrumento se colocan las puntas del compás sobre un segmento AB y a continuación se elige una medida sobre ambas regletas. Por último, se unen los dos puntos a través de un segmento de recta A'B'.
   a. ¿Cómo son $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ entre sí?, ¿se tocarán en algún punto si se extienden?
   b. ¿Cómo son $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ entre sí?, ¿se tocarán en algún punto?, ¿en cuál?

2. Escribe en tu cuaderno la razón entre los segmentos CA y CB; CA' y CB'. Considera que la escala de cada regleta es la misma y cada marca equivale a 1 cm.
   a. ¿Cómo resultaron ser las razones entre sí?
   b. ¿Cómo son $\overline{CA}$, $\overline{CB}$ respecto a $\overline{CA'}$ y $\overline{CB'}$?
   c. ¿En qué proporción están $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$?
   d. De acuerdo con tus observaciones, ¿cuál es la función del instrumento?

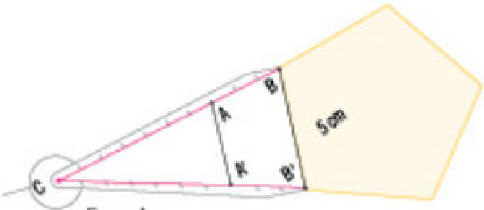


Figura 1
Empleo del compás geométrico.

3. Explica brevemente por qué funciona el instrumento y en qué principio geométrico se basa su funcionamiento.

Con ayuda de tu profesor, comparte tus respuestas con un compañero. En caso de haber diferencias, analicen a qué se debieron y corrijan lo que sea necesario.

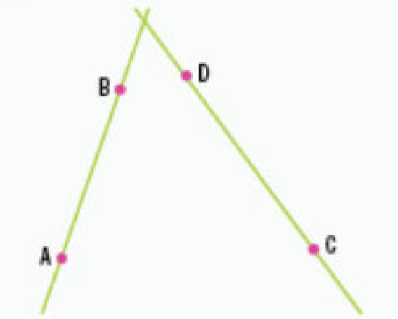
HISTORIA DE LAS PALABRAS

La palabra "proporción" proviene del latín "*proportionem*" que significa "relación comparativa, analogía, relación de una parte con otra". Está relacionada también con la palabra latina "*partio*" que significa "división o relacionado a las partes".

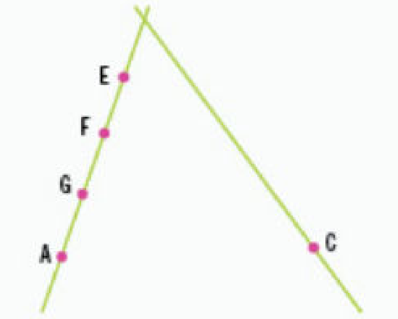
TIC

Realiza la actividad con el *software* de geometría dinámica GeoGebra.

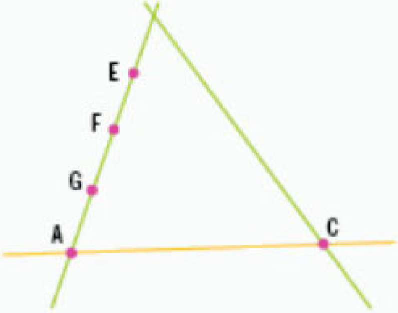
1. Con ayuda de las herramientas **Punto** y **Recta que pasa por dos puntos** traza las rectas AB y DC.



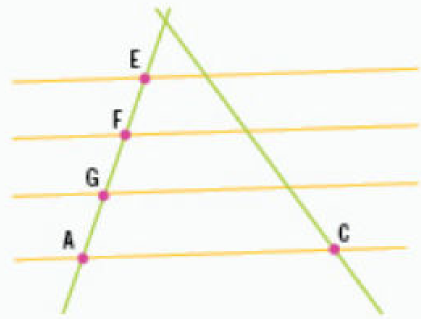
2. Oculta los puntos B y D. Con la herramienta **Punto** traza los puntos E, F y G sobre la recta AB.



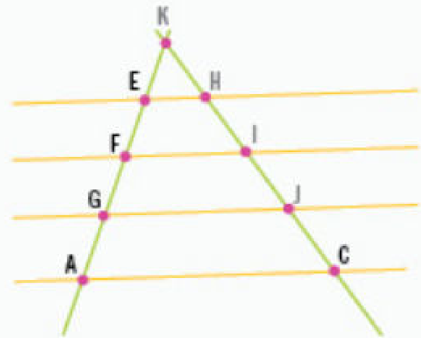
3. Con ayuda de la herramienta **Recta que pasa por dos puntos** traza la recta AC.



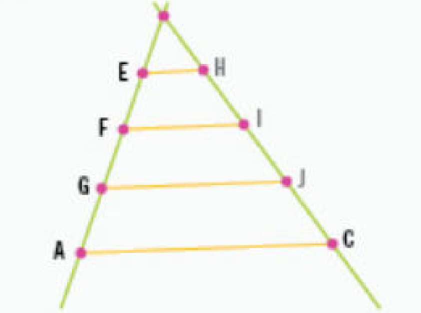
4. A continuación traza rectas paralelas a la recta AC que pasen por los puntos G, F y E.



5. Marca las intersecciones de las paralelas con la recta CD.

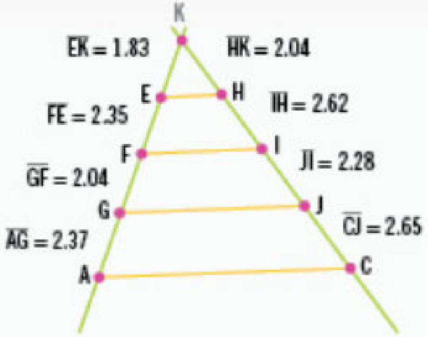


6. Oculta las rectas paralelas y traza los segmentos EH, FI, GJ y AC con la herramienta **Segmento entre dos puntos**.

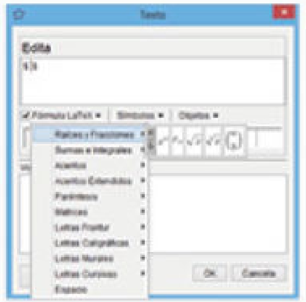


Continúa...

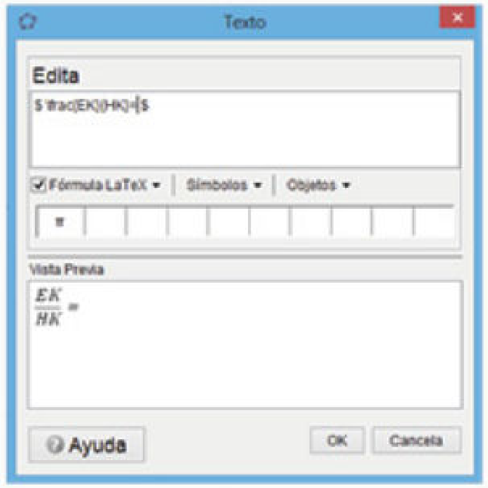
7. Con ayuda de la herramienta **Distancia**, mide las longitudes de los segmentos mostrados.



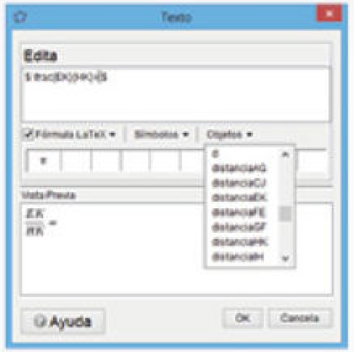
8. Presiona la herramienta **Texto** y después sobre cualquier parte de la ventana gráfica. A continuación marca la opción **Fórmula LaTeX** y después selecciona la plantilla **Fracciones**.



9. Sustituye las letras a y b por EK y HK y después escribe un signo "=" fuera de los corchetes.

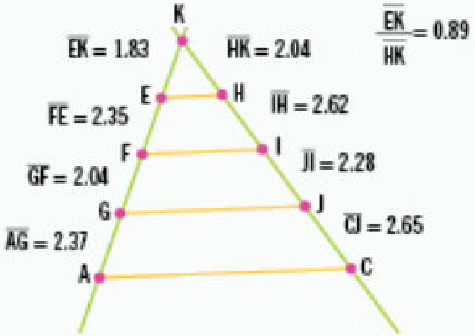


10. Haz clic en la pestaña **Objetos** y busca la distancia EK. Haz clic sobre la leyenda.



11. Presiona dentro del cuadro de texto y escribe **distanciaHK**, tal como se muestra en la figura. Haz clic en el botón **OK**.

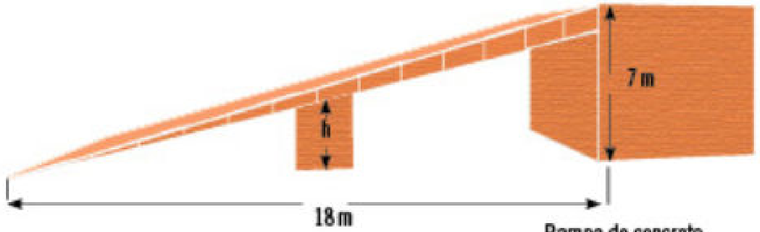
12. Mueve la construcción a través del punto A o del punto C y observa. ¿Cambian las longitudes de los segmentos?, ¿varía su razón? Repite los pasos anteriores para calcular las razones entre otros segmentos. Prueba, por ejemplo, EH con FI, AC con EH, GF con JI. ¿Cambian las longitudes de los segmentos?, ¿varía su razón? Explica con tus palabras por qué sucede lo anterior.



Segmentos proporcionales en arquitectura

Como parte de un nuevo proyecto de carretera que comunicará a dos comunidades, se construye una rampa que servirá para dar acceso a uno de los puentes que conforman el proyecto, como se ilustra en la imagen.

El largo de la base de la rampa mide 18 m y su altura es de 7 m. De acuerdo con estudios de mecánica de suelos, se debe poner un pilar a la mitad del puente. ¿Qué altura debe tener dicho pilar?



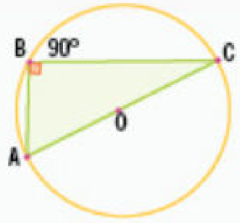
Rampa de concreto.

1. Traza en tu cuaderno un diagrama simplificado de la figura.
   a. ¿Cuántos triángulos hay en tu diagrama?, ¿de qué tipo son?
   b. ¿Cómo son las alturas de los triángulos entre sí?, ¿si se prolongan, se tocarán en algún punto?
   c. ¿Guardan alguna proporción los lados de los triángulos?, ¿cuál es?
   d. ¿Cómo puedes usar esta proporción para encontrar el valor de la altura h?
   e. ¿Cuánto debe medir el pilar de soporte de la rampa?

Con la guía de tu profesor, compara tus respuestas con las de tus compañeros. Si hay diferencias, analicen a qué se debieron y corrijan lo que sea necesario.

PARA SABER MÁS

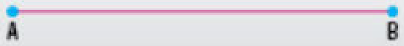
A Tales de Mileto se le atribuye un segundo teorema: "Sea B un punto de la circunferencia de diámetro AC, distinto de A y de C, entonces el triángulo ABC es un triángulo rectángulo".



Reto

Realiza lo que se pide.

Divide el segmento AB en cinco partes iguales utilizando una moneda de 1 peso, regla y escuadra, sin utilizar la graduación de tus instrumentos. Utiliza la moneda como unidad auxiliar.



LECTURALIA

¿De qué está hecho el Universo?, ¿tierra compuesta por agua?, ¿Tales de Mileto contra Babilonia? La respuesta a estas preguntas que inquietaron a Tales de Mileto y mucho más lo encontrarás en el primer capítulo del libro *Grandes ideas de la ciencia*, de Isaac Asimov.

PARA RESOLVER

1. Encuentra la longitud de los segmentos que se indican en la figura 1, dada la condición: $\overline{AD} \parallel \overline{BE} \parallel \overline{CF}$.

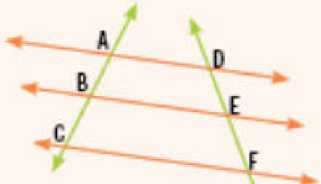
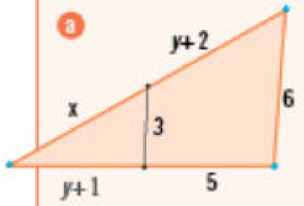


Figura 1

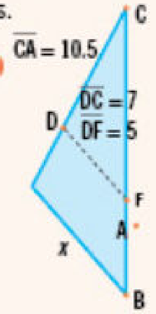
2. Resuelve los problemas en tu cuaderno.
   a. Si $\overline{AB} = 3.5$, $\overline{BC} = 8.5$, $\overline{DE} = 10.5$, encuentra $\overline{EF}$.
   b. Si $\overline{AB} = 51$, $\overline{DE} = 17$, $\overline{EF} = 33$, encuentra $\overline{BC}$.
   c. Si $\overline{AB} = 8$, $\overline{BC} = 4$, $\overline{DE} = 12$, encuentra $\overline{EF}$.

3. Encuentra el valor de x en cada uno de los triángulos mostrados.

a



b



4. Se sabe que las rectas a y b son paralelas. Auxiliándote de la figura 2, ¿podrías asegurar que la recta c es paralela a las rectas a y b?

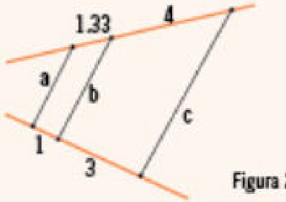


Figura 2

Con la guía de tu profesor compara tus respuestas con las de un compañero. Entre los dos, escriban una conclusión sobre cómo se aplica el teorema de Tales en estos problemas.

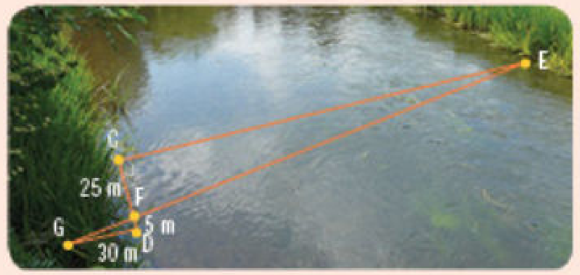
PARA TERMINAR

Analiza el planteamiento y resuelve en tu cuaderno lo que a continuación se pide.

Se desea estimar el ancho de un río para la construcción de un puente de madera. Para esto se ha utilizado el método que se ilustra en la imagen. Desde la orilla del río se identifica un objeto de referencia al otro lado de éste ($\overline{CE}$), a continuación se camina una distancia de 25 m de manera perpendicular a $\overline{CE}$. Al llegar a ese punto se clava una estaca como marca ($\overline{CF}$) y se caminan otros 5 m más ($\overline{DF}$) en la misma dirección. Posteriormente, se avanza de forma perpendicular a $\overline{FD}$ ($\overline{DG}$) hasta alinear con la mirada la marca y el objeto de referencia ($\overline{GF} + \overline{FE}$), y se mide esta distancia, en nuestro ejemplo, 30 m.

1. ¿Cómo son los triángulos GDF y CEF? Argumenta tu respuesta.
2. ¿Cómo son los lados correspondientes de triángulos GDF y CEF ($\overline{CF}$ – $\overline{FD}$, $\overline{DG}$ – $\overline{CE}$, entre otros)? Argumenta tu respuesta.
3. ¿Cuál es el ancho estimado del río?

Con ayuda de tu profesor, comparte tus respuestas con un compañero. En caso de haber diferencias, analicen a qué se debieron y efectúen las correcciones necesarias.

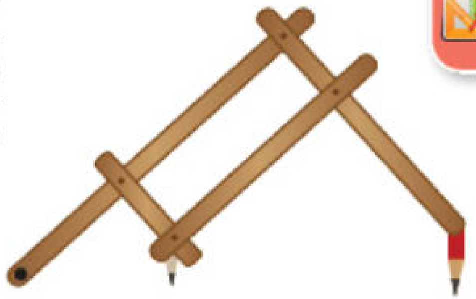


LECCIÓN 4

APLICACIÓN DE LA SEMEJANZA EN LA CONSTRUCCIÓN DE FIGURAS HOMOTÉTICAS

Una de las acciones más sorprendentes realizadas por Tales de Mileto fue calcular de manera sencilla la altura de una de las pirámides de Egipto, sin medirla directamente. Tales midió la sombra que proyectaba la pirámide, cuando la sombra y la altura en un triángulo rectángulo formado por una estaca eran de la misma longitud.

- ¿Te has preguntado cómo hacen los grabados con tu nombre en una pluma o una pulsera?
- ¿Cómo logran trazar los grandes murales?
- ¿Qué procesos geométricos se emplean para reducir o ampliar dibujos o figuras?
- ¿Recuerdas qué es un pantógrafo?



La invención del pantógrafo se atribuye a Christopher Scheiner en el siglo XVII.

PARA COMENZAR

Formen equipos de tres o cuatro integrantes y lean el texto. Después hagan lo que se pide.

Una de las transformaciones más frecuentes es la homotecia, la cual sucede cuando cada punto de una determinada figura se "alarga" o se "acorta", lo que sucede en los dibujos y trazos realizados con pantógrafos, en las fotocopiadoras o en los escáneres.

1. Cada integrante del equipo efectuará los trazos que se indican a continuación, en su cuaderno de hojas cuadriculadas, empleando su regla. En todo momento verificarán la similitud entre sus trazos.
   a. Tracen, en el centro de la hoja, un polígono regular (triángulo, cuadrado o pentágono) de no más de tres cuadros de longitud por lado.
   b. Elijan un punto A fuera de la figura trazada.
   c. Tracen líneas del punto A a cada vértice del polígono y midan las distancias, enumerándolas.
   d. Calculen una nueva distancia, multiplicando cada distancia medida por 2.
   e. Partiendo del punto A, tracen sobre cada línea una nueva línea de longitud igual a cada nueva distancia calculada.
   f. Señalen con un punto el extremo de cada segmento.
   g. Unan entre sí en el mismo orden los nuevos puntos obtenidos, como vértices de una nueva figura.
      - ¿Cómo es la figura obtenida?
      - ¿Es un polígono regular?
      - ¿Qué sucederá si ahora se multiplica por 1?

Continúa...

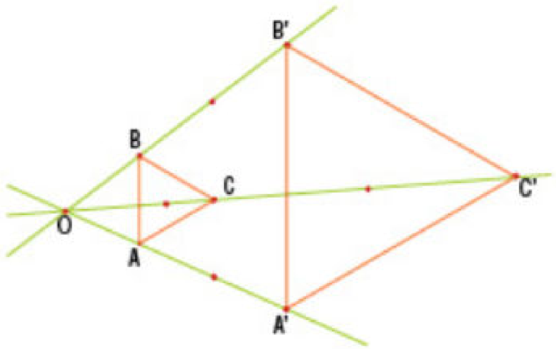
h. ¿Qué sucederá si ahora se multiplica por otro número, como 2.5, 3 o 3.5?
i. ¿Qué sucederá si ahora se multiplica por $\frac{1}{2}$?
j. ¿Qué sucederá si ahora se multiplica por −1?
k. ¿Qué sucederá si ahora se multiplica por el número −2.5?
l. ¿Cómo generalizarían los casos respecto a las figuras que obtienes al multiplicar los puntos por un número: (a) $0 < k$, (b) $k < 0$ y (c) $k > 1$?

Con la ayuda de su profesor, discutan cada caso con otros equipos y posteriormente presenten sus conclusiones ante el grupo.

Construcción de figuras homotéticas

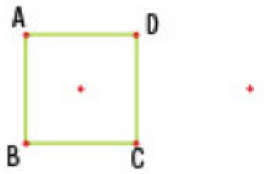
Realiza lo que se pide.

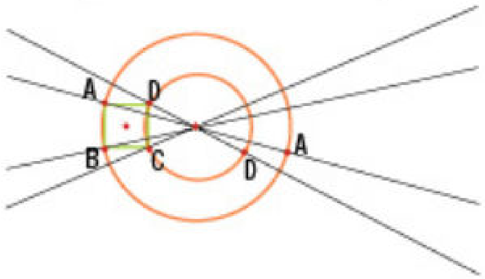
1. Observa la figura y contesta las preguntas.

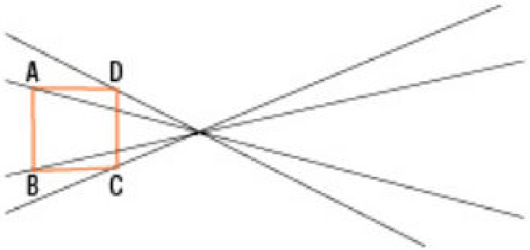


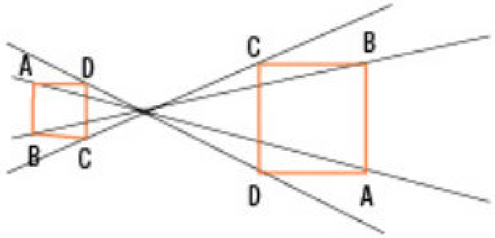
a. ¿Cómo son entre sí los segmentos AB y A'B'; BC y B'C', y AC y A'C'?
b. Mide los lados de los triángulos. ¿Qué puedes deducir considerando dichas longitudes?
c. ¿Cuánto miden los ángulos CAB, ABC, ACB, C'A'B', A'B'C' y A'C'B'?, ¿cómo son entre sí?
d. ¿Cuánto miden los segmentos de recta OA, OA', OB, OB' y OC, OC'?, ¿qué puedes deducir?
e. ¿Cuánto mide el perímetro de los triángulos ABC y A'B'C'?
f. Al considerar que el triángulo A'B'C' se construyó a partir del triángulo ABC, ¿cuál es el factor o constante de homotecia entre ambos?
g. ¿Consideras que sucedería lo mismo con otras figuras?

2. A continuación se muestran los trazos para construir un par de cuadrados homotéticos. Ordena los trazos según corresponda y describe cada uno de ellos. Después, reproduce los trazos en tu cuaderno utilizando regla y compás.









PARA SABER MÁS

La homotecia es una operación matemática que transforma los objetos geométricos en otros ampliados o reducidos, pero conservando casi todas sus características. A ésta y otras más se les denomina "transformaciones lineales".

Cuando se construyen dos figuras homotéticas con un factor $k > 0$, ambas se encontrarán del lado del punto de homotecia. Este caso se llama homotecia directa. Cuando la figuras están en diferentes lados del punto se tiene un factor $k < 0$. En este caso se llama homotecia inversa.

3. En tu cuaderno realiza cada uno de los trazos que se indican enseguida.
a. En el centro de una hoja traza un pentágono de no más de 3 cm por lado e identifica sus vértices con letras distintas.
b. Traza un punto fuera del pentágono y nómbralo con la letra O (centro de la homotecia).
c. Traza segmentos de recta que pasen por los vértices del pentágono y el punto fuera de éste.
d. Nombra cada uno de los segmentos usando diferentes letras, mídelos y anota sus longitudes en la parte superior derecha de la hoja.
e. Calcula otras longitudes multiplicando la medida de cada segmento por $\frac{3}{4}$ y anótalas en la parte inferior derecha de la hoja.

Reto

Realiza lo que se pide.

Mide las dimensiones de cada uno de los cuadrados de la actividad anterior, así como las distancias del punto de homotecia a los vértices de cada figura. Determina cuál es el factor o constante de homotecia.

f. Desde el punto O, traza segmentos de recta que midan las longitudes que obtuviste de tal forma que dichos segmentos coincidan en una misma recta con los segmentos que trazaste en el inciso c.
g. Traza y nombra los puntos que están en el extremo de los segmentos que construiste en el inciso anterior.
h. Mediante segmentos de recta une dichos puntos de manera que sean vértices de una nueva figura.

Comparte tus resultados con tus compañeros y, con la guía del profesor, lleguen a conclusiones comunes.

PARA RESOLVER

1. En tu cuaderno, traza un pentágono de 3 cm de lado.
2. Partiendo de este polígono, construye dos pentágonos homotéticos: uno de 1cm de lado y otro de 6 cm de lado.
3. Con base en tus pentágonos, analiza los conceptos de homotecia directa y homotecia indirecta y explica cómo aplican en los pentágonos que construiste.

Con ayuda de tu profesor, compara tu análisis con el resto del grupo y lleguen a una conclusión al respecto.

PARA TERMINAR

En una hoja cuadriculada de tu cuaderno, empleando regla y lápiz, realiza los trazos siguientes.

1. Dibuja, en el centro de la hoja, un cuadrado de 3 cm de lado.
   a. ¿Cuál es el perímetro del cuadrado?
2. Elige un punto A fuera de la figura trazada.
3. Traza líneas del punto a cada vértice del polígono, mide las distancias y enuméralas.
4. Calcula una nueva distancia: multiplica cada distancia medida por el 3.
5. Partiendo del punto A, traza segmentos de línea de longitud igual a cada nueva distancia calculada.
6. Señala con un punto el extremo de cada segmento.
7. Une entre sí en el mismo orden los puntos obtenidos como vértices de una nueva figura.
   a. ¿Cómo es la figura obtenida?
   b. ¿Cuánto mide cada lado?
   c. ¿Cuál es el perímetro del cuadrado?
8. Calcula la razón entre la longitud del lado del cuadrado original y la longitud del lado del nuevo cuadrado.
9. Calcula la razón entre el perímetro del cuadrado original y el del nuevo cuadrado.
   a. ¿Cómo resultaron?
   b. ¿Cuál será el principio que se encontró?

Con ayuda de tu profesor, comenta tus respuestas con el resto del grupo.

MANEJO DE LA INFORMACIÓN

LECCIÓN 5

LECTURA Y CONSTRUCCIÓN DE GRÁFICAS DE FUNCIONES CUADRÁTICAS PARA MODELAR DIVERSAS SITUACIONES O FENÓMENOS

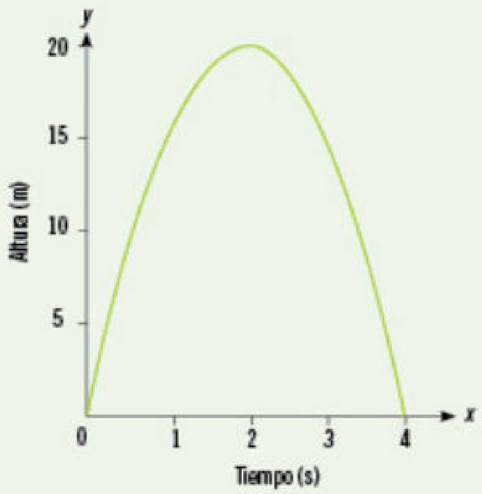
Las funciones cuadráticas están implícitas en distintos fenómenos y diferentes ramas de la ciencia. Este tipo de funciones se usan para describir la trayectoria del movimiento de una pelota cuando es lanzada hacia arriba, o para el lanzamiento de un proyectil e inclusive la trayectoria de un clavadista. También se utilizan para medir el consumo de energía o para calcular los ingresos mensuales de una empresa.

- ¿Cómo se modelaría la trayectoria de la pelota?
- ¿Y el consumo de energía en los hogares?

PARA COMENZAR

Analiza el problema siguiente.

Raúl estudia el movimiento de una pelota que se lanza hacia arriba. Registró la altura y el tiempo que transcurría e hizo la gráfica correspondiente.



1. Responde las preguntas.
   a. ¿Después de cuánto tiempo la pelota cayó al suelo?
   b. ¿Cuál fue la máxima altura que alcanzó la pelota?
   c. ¿Cuántos segundos habían transcurrido cuando alcanzó la altura máxima?
2. Considerando la información de la gráfica, completa la tabla.

Tiempo (s)	0					
Altura (m)	0					

   a. ¿Pudiste obtener la información de la altura que iba alcanzando la pelota y el tiempo que transcurría a partir de la gráfica?

Con la ayuda de tu profesor, comparte tus respuestas con algún compañero. Si encuentran diferencias, analicen a qué se debieron y efectúen las correcciones que sean necesarias.

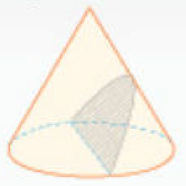
Gráficas y funciones cuadráticas

Lanzamientos de proyectiles

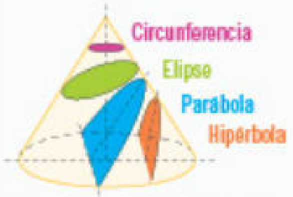
En el plano cartesiano se construyeron las gráficas que describen las trayectorias de un proyectil que fue lanzado a una velocidad de 12 m/s con diferentes ángulos de inclinación.

PARA SABER MÁS

La parábola es la sección cónica que resulta de cortar un cono recto con un plano que es paralelo a su generatriz.

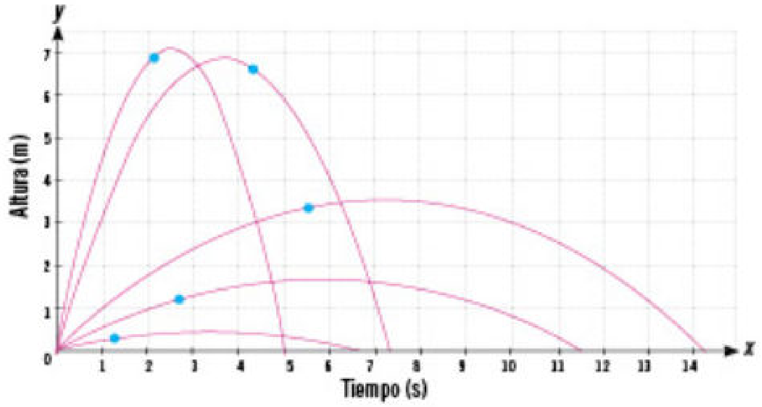


La parábola se modela matemáticamente mediante una función de la forma $f(x)=ax^2+bx+c$.



Las cónicas de Apolonio (circunferencia, elipse, hipérbola) se obtienen efectuando otro tipo de cortes en un cono recto.

1. Si los ángulos de disparo fueron 80°, 75°, 45°, 30° y 15°, escribe en cada trayectoria el ángulo del lanzamiento, según corresponda.
2. Con ayuda de una regla divide en cinco partes iguales cada uno de los segmentos de recta del eje y.



a. ¿Cuál es la máxima altura que alcanzó el proyectil en cada caso?
b. ¿Después de cuánto tiempo el proyectil cayó en el suelo en cada lanzamiento?

PARA SABER MÁS

La palabra "parábola" se utilizó como un cultismo desde el siglo XV y hacía referencia a las enseñanzas morales de alguna narración. Es además una figura literaria.

Con la ayuda de tu profesor, comparte tus respuestas con algún compañero. Si encuentran diferencias, analicen a qué se debieron y corrijan lo que sea necesario.

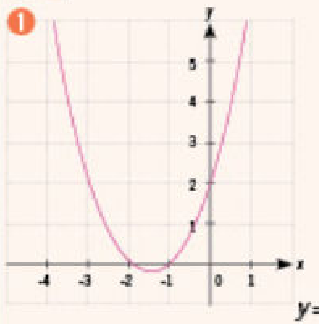
MATEMÁTICAS HISTÓRICAS

Las secciones cónicas fueron descubiertas por Menecmo (380-320 a.n.e.) cuando estaba estudiando el problema de la duplicación del cubo. No obstante, Apolonio de Perge (262-190 a.n.e.) fue el primero en usar el término "parábola" en su tratado sobre las cónicas. Él fue quien mencionó que un espejo parabólico refleja de forma paralela los rayos emitidos desde su foco.

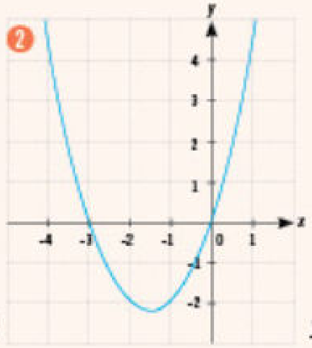
Fuente: Materiales didácticos del Proyecto Descartes.

PARA RESOLVER

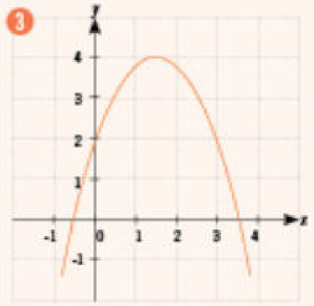
Observa las gráficas y contesta las preguntas.



$y=x^2+3x+2$



$y=x^2+3x$



$y=-x^2+3x+2$

PARA SABER MÁS

La función cuadrática es de la forma $f(x)=ax^2+bx+c$, donde a, b y c son números llamados coeficientes y x es la variable. La función cuadrática se puede describir también como una función polinomial de grado dos. La gráfica de este tipo de función es una parábola.

1. ¿Qué observas cuando el signo del coeficiente del término cuadrático es negativo o positivo?
2. ¿Cuál es la diferencia entre la gráfica y las otras dos gráficas?
3. ¿En cuáles coordenadas intersectan las parábolas al eje y en cada caso?

Control de sustancias químicas

Un centro de investigación está realizando estudios para purificar la atmósfera. Esto requiere que una compañía libere cierta sustancia química durante 15 horas al día. La cantidad de sustancia que se requiere liberar está dada en función del tiempo. La tabla siguiente contiene información al respecto.

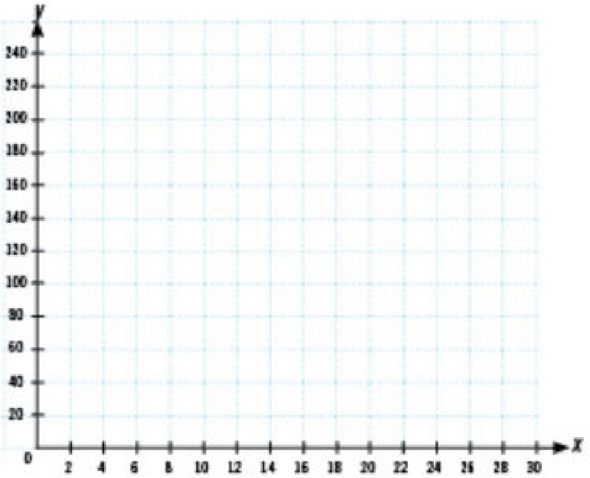
Tiempo (h)	0	3	6	9
Sustancia química (ton)	0	7.8	19.2	34.2

1. Si la función que hace referencia a esta situación es $y=\frac{1}{5}x^2+2x$,
   a. ¿cuántas toneladas de esa sustancia química se requerirán al cabo de 12 horas?;
   b. ¿cuántas toneladas se requerirán para purificar la atmósfera durante una semana?;
   c. ¿cuántas toneladas de esa sustancia química se requieren para purificar la atmósfera durante 2 semanas?,
   d. ¿y durante 3 y 4 semanas?

2. Construye una gráfica de tal forma que represente la relación entre la cantidad de sustancia liberada y el tiempo. Emplea el plano cartesiano siguiente.

LECTURALIA

Te invitamos a leer la obra *Curvas Maravillosas, numeros complejos y representaciones conformes*, de A. I. Markushevich en el sitio: http://www.librosmaravillosos.com/curvasmaravillosas/curvasmaravillosas.html (consultado el 17 de marzo de 2016).



a. ¿Qué observas en la gráfica?, ¿a qué crees que se debe?

Con la ayuda de tu profesor, comparte tus respuestas con algún compañero. Si encuentran diferencias, analicen a qué se debieron y efectúen las correcciones que sean necesarias.

Reto

Analiza el texto siguiente y contesta las preguntas en tu cuaderno.

La trayectoria de un clavadista que se lanza desde una plataforma se puede describir mediante la función.

$$y = -4.9x^2 + 10$$

1. ¿A qué altura estaba la plataforma?
2. ¿Se puede determinar exactamente cuánto tiempo tardó el clavadista en entrar a la fosa de clavados?, ¿cómo? Justifica tu repuesta.

Tarea en casa

Luis tiene un negocio de refacciones de autos. Él calcula las ganancias semanales mediante la función $y=-2x^2+100x+600$, donde x es la cantidad de artículos que vende.

1. Elabora en tu cuaderno una tabla que contenga las ganancias del negocio de Luis.
2. Construye una gráfica que represente las ganancias en función del tiempo.
   a. ¿Cuál fue la mayor ganancia?
   b. ¿En qué momento Luis deja de obtener ganancias?

PARA TERMINAR

Analiza el planteamiento y desarrolla lo que se indica.

El consumo de energía en kilowatts se mide en función del tiempo. Un electricista registró los datos del consumo de energía de una fábrica a determinadas horas y los anotó en la tabla siguiente.

Tiempo (horas)	0	1	2	3	4
Consumo (kilowatts)	0	220	400	540	640

A partir de estos datos obtuvo la función que modela el consumo en determinada hora del día en función del tiempo:

$$c(t) = -20t^2 + 240t$$

Donde c(t) es el consumo y t el tiempo en el que se toma la medición.

1. Según el modelo, responde.
   a. ¿Cuál será el consumo al cabo de las 10 horas?
   b. ¿Cuál será el consumo al cabo de las 12 horas?
2. En tu cuaderno, construye una gráfica que represente el consumo de energía en función del tiempo transcurrido.
   a. ¿A qué hora se consume más energía en la fábrica?
   b. ¿Cuántos kilowatts se consumieron a esa hora?
3. De acuerdo con la gráfica que construiste determina lo siguiente.
   a. ¿A partir de qué hora el consumo de energía empieza a disminuir?
   b. ¿Cuánto dura la jornada de trabajo en la fábrica?

Con la ayuda de tu profesor, comparte tus respuestas con algún compañero. Si encuentran diferencias, analicen a qué se debieron y efectúen las correcciones que sean necesarias.

Un foco incandescente consume más energía que un foco denominado "ahorrador" al aportar la misma intensidad luminosa.

LECCIÓN 6

LECTURA Y CONSTRUCCIÓN DE GRÁFICAS FORMADAS POR SECCIONES RECTAS Y CURVAS QUE MODELAN SITUACIONES DE MOVIMIENTO, LLENADO DE RECIPIENTES, ETCÉTERA

Las funciones son relaciones que asocian un número con otro número de forma única; por ejemplo, al llenar recipientes con agua se puede observar la relación entre el volumen y la altura del agua. También puede asociarse el tiempo que tarda en llenarse un tinaco con el volumen de agua que puede contener o asociar los litros de un tanque de gasolina con su costo.

- ¿Puedes representar gráficamente la relación entre la altura y el tiempo que tarda en llenarse un recipiente?
- ¿Es posible predecir el tiempo de llenado con las gráficas?
- ¿Cuál sería la utilidad de esas gráficas?
- ¿Puedes mencionar otras relaciones que se puedan observar al llenar un recipiente?

A la cantidad de agua que fluye por la manguera en la unidad de tiempo se le denomina "gasto hidráulico".

El agua depositada en el tinaco adquiere energía potencial.

PARA COMENZAR

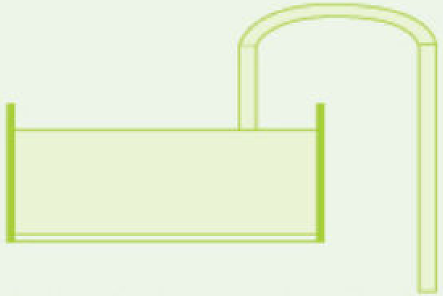
Con ayuda de su profesor, formen equipos de cuatro personas para realizar la actividad propuesta, en la que van a construir un sifón.

Antes de iniciar la actividad, consigan el material que se lista a continuación.

- Cubeta o recipiente cilíndrico con capacidad de al menos 2 l.
- Regla graduada de 30 cm.
- Botella de refresco de 2 l con su tapa.
- Manguera transparente de 2 m de longitud, con un diámetro interno de 4 mm.
- Soporte universal con una barra o anillo de hierro, el cual se puede obtener del laboratorio escolar.

Continúa...

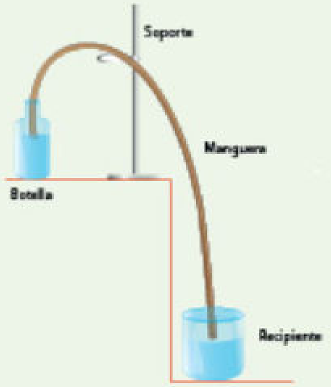
- Cinta adhesiva.
- Marcador de tinta indeleble.
- Cronómetro.



El sifón es un dispositivo que se utiliza para extraer líquidos de un recipiente sin inclinarlo.

Desarrollo

1. Realicen un orificio en la tapa de la botella, de tal forma que pueda introducirse la manguera de manera ajustada.
2. En la misma tapa hagan dos orificios pequeños (alrededor de 1 mm de diámetro) a un lado del primero. Estos servirán para que por ellos entre aire al recipiente.
3. Iniciando en la base del recipiente, tracen una escala graduada, visible para el observador, en milímetros. Resalten los centímetros y los medios centímetros. Empleen el marcador y la regla graduada.
4. Llenen de agua la botella y enrosquen la tapa.
5. Introduzcan la manguera por el orificio de la tapa, de tal modo que el extremo llegue casi al fondo del recipiente.
6. Coloquen la botella con la manguera en una mesa y junto a ésta el soporte universal. Pasen la manguera por encima de la barra de modo que el extremo libre cuelgue hacia el piso.
7. Sujeten la manguera a la barra del soporte con cinta adhesiva. En caso de no conseguir el soporte universal, uno de los integrantes del equipo puede sostenerla, o bien, pueden improvisar algún tipo de soporte con material que tengan a su alcance.
8. Debajo del extremo libre de la manguera, coloquen la cubeta o recipiente para que recoja el líquido que saldrá por ella. Con estas condiciones el sifón está listo.
9. Uno de los integrantes del equipo debe aspirar con fuerza, succionando con la boca por el extremo inferior de la manguera hasta que se llene de agua, de manera que el líquido logre salir por el extremo libre de la manguera. En caso de que no salga, deben intentar de nuevo hasta lograrlo.
10. Otro integrante del equipo, empleando el cronómetro, dirá en voz alta el tiempo cada 10 segundos, mientras que un tercero observará la medida de la altura del agua en el recipiente y proporcionará el dato al cuarto integrante del equipo.



Estructura y funcionamiento de un sifón.

Continúa...

11. Este último anotará en una tabla, como la siguiente, las medidas proporcionadas de la altura del agua en el recipiente respecto al tiempo, a partir de que empiece a salir y se accione el cronómetro.

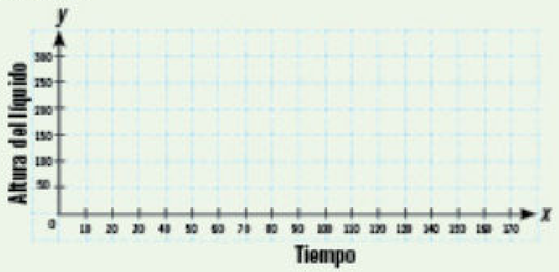
Tiempo (s)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Altura (mm)											

12. Se tomarán los datos hasta que deje de fluir el agua, para ello bastará agregar a la tabla las columnas que sean necesarias.
13. Repitan el experimento nuevamente para tener más certeza de los datos obtenidos. Los datos del segundo experimento se anotarán en una nueva tabla.

Tiempo (s)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Altura (mm)											

14. Con los datos obtenidos en las tablas, construyan las gráficas correspondientes a los experimentos, empleando el color rojo para los datos del primer experimento y el color azul para los del segundo experimento.

15. A continuación, respondan las preguntas.
   a. ¿Qué ocurrirá mientras el tiempo transcurre?
      - ¿El volumen del recipiente aumenta o disminuye?
      - ¿La gráfica obtenida representa un aumento o una disminución del volumen del agua?
      - ¿La altura del agua aumenta en forma constante?



   b. Si cambiara la forma del recipiente, ¿creen que la gráfica sería diferente a las obtenidas anteriormente?
   c. Realicen un esbozo de la gráfica si cambian la posición de la cubeta, es decir, si la colocan en la mesa para vaciarla.

Con ayuda de su profesor, compartan sus resultados con otros equipos. ¿Recopilaron diferente información o existen errores en el trazo de las gráficas? Obtengan una conclusión en común respecto a la razón entre la disminución de volumen y el tiempo transcurrido. Si encuentran diferencias, analicen a qué se debieron.

TIC

Construye una gráfica en Excel con los datos siguientes, son del llenado del líquido de un recipiente obtenidos en un laboratorio.

Tiempo (s)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110
Altura del líquido (cm)	17	17.2	17.4	17.5	17.8	17.9	18.2	18.4	18.7	18.9	19.1	19.3	19.5	19.7	19.9	20.1	20.4	20.6	20.8	21.1	21.3	21.5	21.7

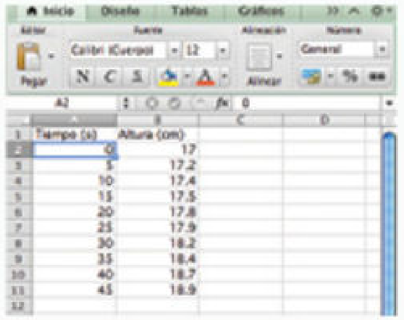
1. Abre una nueva hoja de cálculo en Excel.

   Inicio | Todos los programas | Microsoft Office

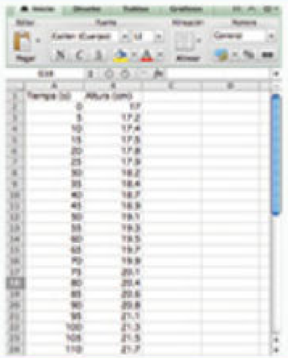
2. En la celda A1 escribe el encabezado **Tiempo (s)** y en la columna B1 escribe **Altura (cm)**.

	A	B
1	Tiempo (seg)	Altura (cm)

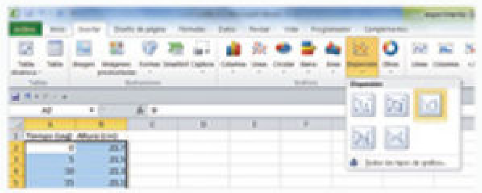
3. En las columnas A y B escribe los valores de la tabla proporcionada.



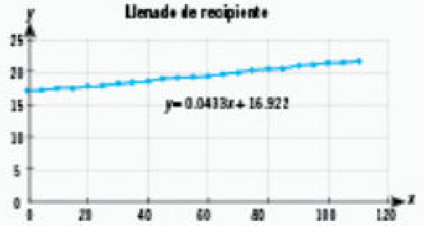
4. Selecciona todos los datos de ambas columnas.



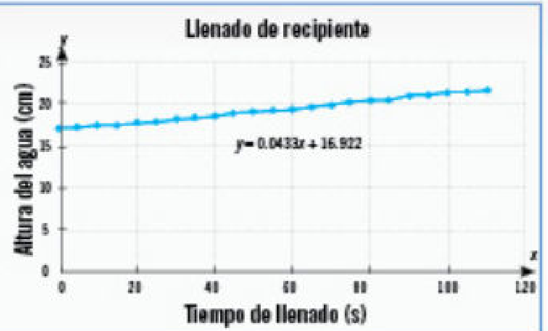
5. En la barra del menú selecciona **Insertar – Dispersión – Dispersión con líneas suavizadas.**



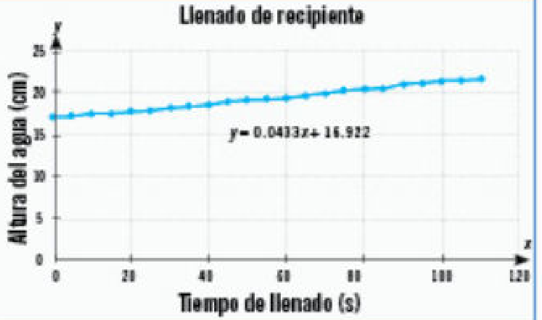
6. Para colocar el título a la gráfica, teniendo seleccionada la gráfica, en la barra del menú elige **Presentación – Título del gráfico – Encima del Gráfico** y escribe **Llenado de un recipiente.**



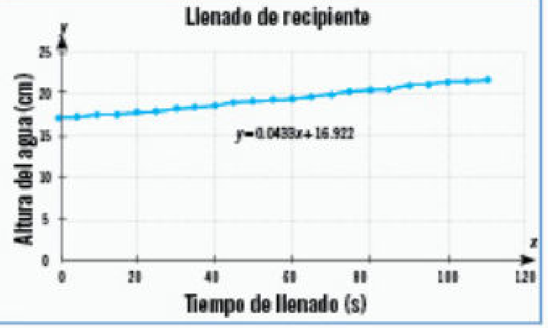
7. Para colocar el rótulo del eje horizontal, teniendo seleccionada la gráfica, en la barra del menú elige la opción **Presentación – Rótulos del eje – Título de eje horizontal primario – Título bajo el eje**. Seleccionarlo y escribe **Tiempo de llenado (s)**.



8. Para colocar los rótulos del eje vertical, teniendo seleccionada la gráfica, en la barra del menú elige la opción **Presentación – Rótulos del eje – Título de eje vertical primario – Título vertical**. Selecciónalo y escribe **Altura del agua (cm)**.



9. Para identificar el tipo de función que representa la gráfica, haz clic derecho sobre la línea de la función y en el menú contextual que aparece elige la opción lineal en tipo de tendencia o regresión. Activa el cuadro de verificación **Presentar ecuación en el gráfico** y presiona el botón cerrar.

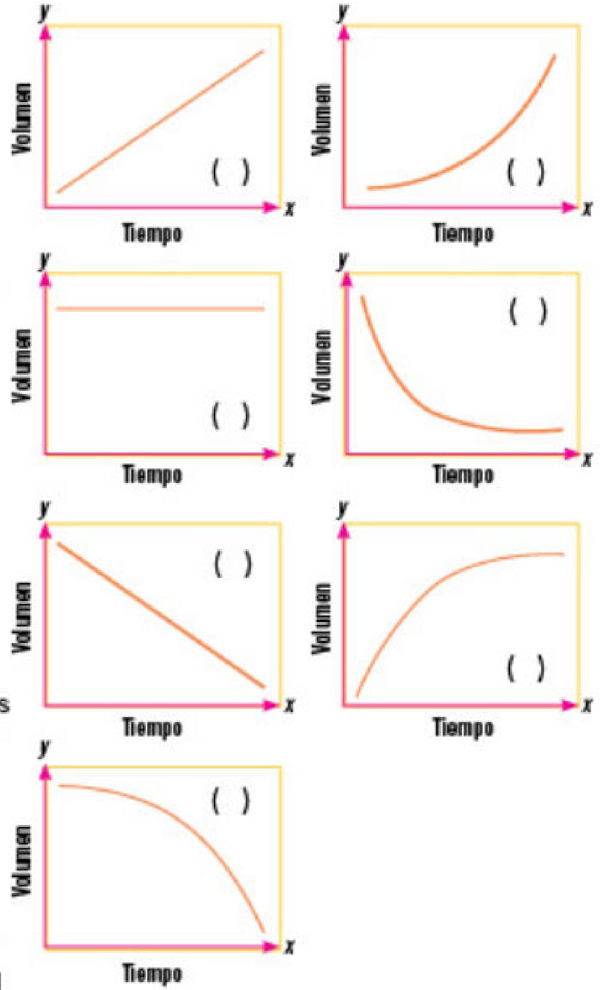


Análisis de las gráficas formadas por secciones rectas que representan el llenado y vaciado de recipientes con agua

Con ayuda de tu profesor, reúnete con un compañero para realizar esta actividad, que consiste en observar y determinar la relación entre el volumen del agua y el tiempo de llenado o vaciado en recipientes de distintas formas.

1. En cada uno de los paréntesis de las gráficas de la página siguiente, coloquen la letra del enunciado que describe el vaciado o llenado de un recipiente según su forma, de modo que corresponda a las definiciones del lado derecho. Noten que las gráficas no tienen números o ecuaciones, deben enfocarse sólo en la relación existente entre los gráficos y los enunciados que refieren los procesos de vaciado y llenado, según la forma del recipiente que contiene el agua.

a. El volumen del agua disminuye de manera constante.
b. El volumen del agua permanece constante sin ningún cambio.
c. El volumen del agua disminuye de forma variable aumentando con respecto al tiempo.
d. El volumen del agua aumenta de forma variable disminuyendo con respecto al tiempo.
e. El volumen del agua aumenta de manera constante.
f. El volumen del agua disminuye de forma variable disminuyendo con respecto al tiempo.
g. El volumen del agua aumenta de forma variable aumentando con respecto al tiempo.



2. A partir del análisis que realizaron sobre las gráficas, reflexionen sobre cómo el cambio de una variable afecta a otra variable. Después contesten las preguntas.
   a. ¿En qué gráficas consideran que el volumen del líquido está aumentando?
   b. ¿En qué gráficas consideran que el volumen del líquido está disminuyendo?
   c. ¿En qué gráficas la razón de cambio en el volumen del líquido permanece constante?
   d. ¿En qué gráficas la razón de cambio en el volumen del líquido aumenta?
   e. ¿En qué gráficas la razón de cambio en el volumen del líquido disminuye?
3. ¿Puede aumentar una función mientras su razón de cambio disminuye? Si la respuesta es "sí", escriban la letra en el paréntesis que representa la situación planteada, y si es "no", justifiquen su respuesta.
4. ¿Puede disminuir una función mientras su razón de cambio disminuye? Si la respuesta es "sí", escriban la letra en el paréntesis que representa la situación planteada, y si es "no", justifiquen su respuesta.

PARA SABER MÁS

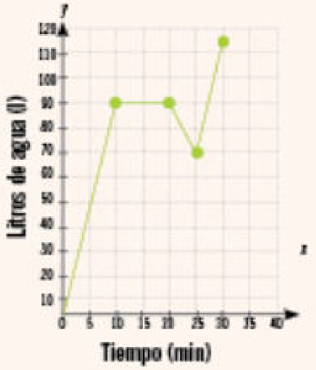
El uso de las gráficas en la práctica social desempeña un papel fundamental. Las gráficas constituyen una estrategia, entre muchas otras, que permite a los seres humanos construir nuevos conocimientos para transformar su entorno, al ir resolviendo asuntos afines con las necesidades de la sociedad de la cual forman parte.

Con ayuda de su profesor, comenten sus resultados con otras parejas y lleguen a conclusiones comunes entre todo el grupo.

PARA RESOLVER

Analiza los planteamientos y resuelve en tu cuaderno lo que se señala.

1. La gráfica representa la variación de la cantidad de agua en un tinaco de una casa, a partir de que se abre la llave de llenado, misma que permanece abierta y descarga 18 l cada 2 minutos.



   a. Tomando como base la gráfica, contesta las preguntas siguientes.
      - ¿Cuántos litros de agua tiene el tinaco al minuto 10?
      - ¿Durante cuál intervalo de tiempo se utiliza el agua?
      - ¿Qué sucede con la cantidad de agua entre los minutos 10 y 20?, ¿por qué?
      - ¿Cuántos litros de agua cayeron al tinaco entre los minutos 25 y 30?

2. Un torneo de tenis duró 10 días. En la tabla siguiente se registraron el número de asistentes por día.

Día	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Asistentes	940	670	520	220	410	400	540	650	870	1100

   a. Construye una gráfica que ilustre los resultados.

3. Sabemos que el alcohol es el responsable de 33% de los accidentes de carretera. La curva de la gráfica de la derecha representa el coeficiente c de riesgo de accidente en función de la tasa t de alcoholemia (en g/l de sangre).

   a. ¿Por cuánto está multiplicado el riesgo de accidente para un conductor si tiene 1 g / l de alcohol en sangre?
      - ¿Cuál es el valor aproximado de la tasa t de alcoholemia para el coeficiente c = 40?
      - Según el aspecto de la gráfica, ¿el riesgo de accidente es proporcional a t?

Con la guía de tu profesor, comenta tus resultados con el resto del grupo.

Reto

Reúne el material y realiza lo que se indica.

- Dos vasos iguales
- Un trozo de manguera
- Regla
- Reloj con cronómetro

1. Llena con agua uno de los vasos y colócalo sobre una mesa.
2. Acomoda el vaso vacío debajo de él.
3. Con el efecto sifón, vierte el contenido del vaso lleno en el vaso vacío, como se muestra en la imagen de la derecha.
4. Introduce una regla en el vaso inferior para tomar la altura del agua mientras se llena.
5. Anota en una tabla la altura del agua en función del tiempo, desde 0, y con intervalos de 5 segundos.
6. Traza una gráfica con la información obtenida.

Análisis del llenado en recipientes de diferentes formas

Con ayuda de su profesor, formen equipos de cuatro personas para realizar la actividad siguiente.

Cuando efectuaron el análisis de las gráficas que representan el llenado y vaciado de recipientes con agua (páginas158-159), hicieron coincidir el enunciado que describe el tipo de cambio con la gráfica que lo representa. En esta actividad retomarán elementos de ese análisis.

Antes de iniciar la actividad, cada equipo debe conseguir el material siguiente.

- Cubeta o recipiente con capacidad de al menos 2 l.
- Regla graduada de 30 cm.
- Recipiente (vaso, florero, frasco, garrafa, por ejemplo). Cada equipo aportará uno de forma distinta.
- Vaso pequeño para verter el contenido de la cubeta al recipiente.
- Una toalla por estación de trabajo.
- Agua suficiente.
- Marcador de tinta indeleble.
- Papel cuadriculado.
- Hoja de registro (se muestra el modelo).

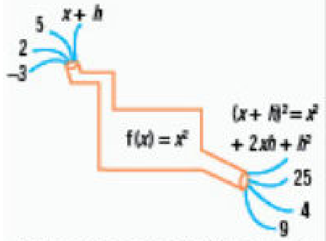
PARA SABER MÁS

Las funciones son reglas que definen cómo el cambio de una variable afecta el cambio en una segunda variable.

Existen además tres grandes ideas sobre el concepto de función.

- Entender que las funciones son reglas en las que se relacionan elementos de un conjunto con elementos de otro conjunto.
- La relación funcional define una variable en términos de otra.
- La relación funcional puede modelar situaciones reales utilizando gráficas, ecuaciones, palabras y tablas. Cada representación es simplemente una forma diferente de expresar la misma idea.

Las ideas anteriores se pueden representar en el esquema de la imagen siguiente.



Si representamos una función como una "caja", la entrada es la variable independiente x y a la salida, obtenemos la variable dependiente $f(x)$.

Desarrollo

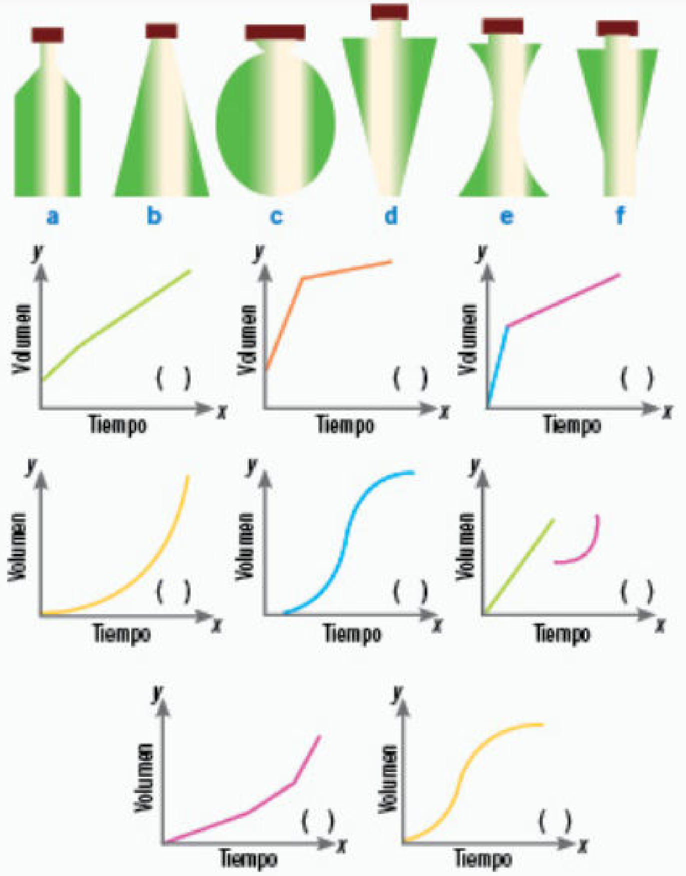
1. Se definirán tantas estaciones de trabajo como equipos se hayan conformado en el grupo. En cada estación de trabajo quedarán fijos los materiales: cubeta con agua, frasco, vaso, toalla y regla.
2. Al inicio de la actividad cada equipo llenará la hoja de registro de acuerdo con las instrucciones siguientes.
   a. Bosquejen una imagen del florero o recipiente en el recuadro correspondiente de la hoja de registro.
   b. En la hoja de registro esbocen una gráfica que represente cómo creen que la altura del agua cambiará con cada taza de agua vertida en ella.
   c. Viertan el agua en el recipiente empleando el vaso en incrementos de medio vaso por ocasión.
   d. Cada vez que se agregue un medio vaso, deben medir la altura del agua en el recipiente para cada incremento.
3. Tienen que registrar la información en la tabla de datos de la hoja de registro.
4. Grafiquen los datos en una hoja de papel cuadriculado.
5. Comparen esta gráfica con la gráfica obtenida mediante los datos del experimento. Anoten sus comentarios en el recuadro correspondiente de la hoja de registro.
6. Cuando hayan completado la hoja de registro los equipos deben rotar en el sentido de giro de las agujas del reloj entre las estaciones.
7. En cada estación se llena una nueva hoja de registro, repitiendo los pasos del tres al diez.
8. En un tiempo de 15 minutos por estación, cada equipo debe visitar tres estaciones.
9. Con los datos obtenidos en el llenado de las hojas de registro, cada uno de los equipos debe contestar las preguntas siguientes.
   a. A medida que vierten el agua en el recipiente, ¿pueden predecir qué gráfica podría aparecer cuando la altura del agua cambia?
   b. ¿La altura del agua que vierten en cualquier recipiente siempre variará de la misma forma?
10. Ya se mencionaron las siete formas en que una gráfica puede cambiar.
    a. ¿Estas formas corresponden a todas las formas representadas en las gráficas que han trazado?, ¿por qué?
    b. ¿Cuáles gráficas están representadas con el llenado de los recipientes?
    c. ¿Por qué no tenemos una línea horizontal en cualquiera de las gráficas obtenidas?
    d. ¿Qué pasa con las otras tres formas en que una gráfica puede cambiar?

    e. ¿Cómo tendrían que ser los recipientes para que los otros tres cambios sean representados en estas gráficas?
    f. ¿Qué relación funcional existe entre las variables de este experimento?

Con ayuda de su profesor, comenten sus respuestas con otros equipos. Comparen sus datos y gráficas para frascos respectivamente iguales y analicen si obtuvieron información semejante o hay diferencias significativas. Obtengan una conclusión grupal.

Tarea en casa

En la imagen se observan seis frascos y ocho gráficas. Elige la gráfica correcta para cada frasco. Haz un dibujo que muestre cómo deberían ser los frascos que corresponden a las dos gráficas restantes.



PARA SABER MÁS

La palabra "función" aún se encuentra en construcción; sin embargo, es posible asumir que una función se puede representar mediante una gráfica o una tabla.

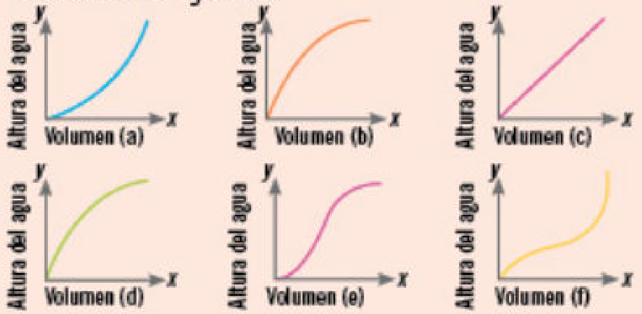
Las funciones sirven como base para comprender y analizar mejor los fenómenos, ya que es el modelo matemático que describe los fenómenos.

REFLEXIONA

¿Alguna vez te has preguntado qué ocurre en el depósito de agua del WC cuando jalas la palanca? Según lo visto en esta lección, ¿qué gráfica de la imagen corresponde a la situación que se te plantea?, ¿por qué razón?

PARA TERMINAR

Abajo encontrarás una serie de gráficas que muestran la posible relación entre el volumen de agua vertida a un recipiente y la altura del agua en el recipiente. Si se asume que los recipientes se llenan con agua de manera continua, imagina y dibuja en tu cuaderno un bosquejo de cómo sería la forma del recipiente para cada una de las gráficas.



Cuando hayas terminado el bosquejo de los seis recipientes, contesta las preguntas.

1. Describe en tu cuaderno la idea que tienes ahora acerca del concepto de función.
   a. ¿Cuáles son las variables que se emplean?
   b. ¿Cuál variable está en función de cuál?
   c. ¿Cuál es, entonces, la variable dependiente y cuál es la variable independiente?
   d. ¿Cómo es la razón de cambio que se presenta?

2. Expresa un modelo matemático que describa la relación entre las variables.

Reúnete con un compañero y comparen sus bosquejos. Verifiquen si los que dibujaron son semejantes y si sus repuestas se corresponden. En caso de haber diferencias, con el apoyo de su profesor, analicen a qué se debieron y efectúen las correcciones necesarias.

LECTURALIA

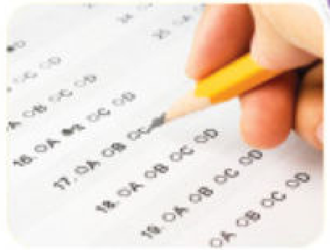
El encanto de las matemáticas se concentra en un libro de historias que te invitan a desarrollar tu ingenio y a poner en práctica tu imaginación para explorar conceptos matemáticos. *El misterioso jarrón multiplicador*, que encontrarás en la Biblioteca Escolar o de Aula, impulsa tu aprendizaje, experimentación y razonamiento lógico.

LECCIÓN 7

CÁLCULO DE LA PROBABILIDAD DE OCURRENCIA DE DOS EVENTOS INDEPENDIENTES (REGLA DEL PRODUCTO)

Casi todos los eventos aleatorios se consideran, generalmente, con un cierto ingrediente de superstición; por ejemplo, es frecuente que cuando se compra un billete de lotería el vendedor ofrezca un número cuya terminación sea diferente a la del último sorteo.

- ¿Tendrá sentido la oferta?
- Si se lanza dos veces una moneda, y si se opta por apostar a la otra cara de la que recién apareció, ¿tiene sentido la apuesta?
- ¿Y si en un examen de opción múltiple, se eligen opciones diferentes para cada respuesta? Veremos en esta lección si las sugerencias de este tipo tienen o no sentido.



Intentar resolver un examen de opción múltiple mediante el cálculo de probabilidades no es una buena idea. Cuántas más opciones hay de respuesta, menor probabilidad hay de elegir la respuesta correcta.

PARA COMENZAR

Con ayuda de tu profesor, reúnete con un compañero y realicen la actividad.

1. Lancen una moneda dos veces y anoten la cara que aparece, suponiendo que la moneda tiene cara (C) por el anverso y águila (A) por el reverso.
2. Definan un conjunto Ω que será el espacio muestral.
3. Anoten en el conjunto Ω (espacio muestral) los elementos que faltan para reunir todos los posibles resultados Ω = {AA,...,}
4. ¿Todas las opciones tienen la misma oportunidad de aparecer? En otras palabras, ¿se trata de un espacio equiprobable?
5. Definamos el evento *B* como "aparece un águila (*A*) en la primera tirada" y el evento *D* como "aparece una cara (*C*) en la segunda tirada".
   a. Escriban, en notación de conjuntos, los elementos de *B*, subconjunto de Ω.
   b. Escriban, en notación de conjuntos, los elementos de *D*, subconjunto de Ω.
   c. ¿Cuál es la probabilidad P(*B*) de que aparezca un águila en la primera tirada?
   d. ¿Cuál es la probabilidad P(*D*) de que aparezca una cara en la segunda tirada?

PARA SABER MÁS

Los eventos independientes son aquellos en los cuales la ocurrencia de uno no afecta la ocurrencia del otro; por ejemplo, el resultado de arrojar al mismo tiempo al aire una moneda y un dado es un evento indendiente, pues el resultado de la moneda no afecta al del dado y viceversa.

Continúa...

6. Definamos ahora el evento F como "aparece un águila en la primera tirada y una cara en la segunda tirada".
   a. Escriban, en notación de conjuntos, los elementos de F subconjunto de Ω.
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que aparezca un águila en la primera tirada y una cara en la segunda tirada? Esto es, $P(B \text{ y } D)$, o bien, $P(B \cap D) = P(F)$.
   c. Calcula el producto $P(B) \times P(D)$ y compara con $P(B \cap D)$.
   d. ¿Será siempre válido el hecho de que $P(B \cap D) = P(B) \times P(D)$?
   e. ¿En qué condiciones se cumple la igualdad?

7. Definamos ahora el evento H como "aparece un águila en la segunda tirada".
   a. Escribe, en notación de conjuntos, los elementos de H subconjunto de Ω.
   b. ¿Cuál es la probabilidad $P(H)$ de que aparezca un águila en la segunda tirada?
   c. ¿Cuál será la probabilidad de que aparezca un águila en la primera tirada y un águila en la segunda tirada $P(B \cap H)$?
   d. ¿Se cumple la igualdad $P(B \cap H) = P(B) \times P(H)$?

Con ayuda de su maestro, discutan sus respuestas con el grupo y lleguen a un consenso, ¿en qué casos la igualdad $P(B \cap D) = P(B) \times P(D)$ es válida?

Probabilidad de eventos independientes

Con la coordinación de su profesor, formen equipos de tres o cuatro compañeros y desarrollen la actividad.

Una urna contiene 3 bolas rojas y 2 azules, todas numeradas (bola roja 1, bola roja 2, bola azul 1,...), aunque indistinguibles al tacto. El evento consiste en tomar una bola sin ver, anotar su color y depositarla nuevamente en la urna. Después se toma otra bola y se repite la operación.

1. Elaboren en su cuaderno una lista con todos los elementos del espacio muestral de dos extracciones $\Omega = \{(R1, R1), (R1, R2), (R1, R3), (R1, A1)...\}$
   a. ¿Todas las opciones tienen la misma oportunidad de aparecer?, ¿se trata de un espacio equiprobable?

2. Sea A el evento "tomar una bola roja en la primera extracción" y B el evento "tomar una bola roja en la segunda extracción".
   a. De la lista de elementos de Ω, extraigan los elementos de A y lístenlos.
   b. Extraigan los elementos de B y lístenlos.
   c. ¿Cuál es la probabilidad $P(A)$?
   d. ¿Cuál es la probabilidad $P(B)$?

   e. ¿Cuál es la probabilidad $P(A \cap B)$ de tomar una bola roja en la primera extracción y una bola roja en la segunda extracción?

3. Comparen $P(A \cap B)$ con el producto de $P(A)$ por $P(B)$.

Con ayuda de su profesor, discutan y comparen sus resultados con los demás equipos. ¿Obtuvieron conclusiones que coinciden con las de la primera actividad? Si no es así, analicen cuál fue la causa y efectúen las correcciones necesarias.

Experimento sin reemplazo

Una urna tiene 3 bolas rojas y 2 azules todas numeradas, aunque indistinguibles al tacto. El evento consiste en tomar una bola sin ver y anotar su color, pero esta vez la bola no se vuelve a depositar en la urna. Después se toma una segunda bola y se anota su color.

1. Lista en tu cuaderno todos los elementos del espacio muestral de dos extracciones $\Omega = \{(R1, R2), (R1, R3), (R1, A1), (R1, A2)...\}$
   a. Sea D el evento "tomar una bola roja en la primera extracción" y E el evento "tomar una bola roja en la segunda extracción", responde.
   b. De la lista de elementos de Ω extrae los elementos de D y lístalos.
   c. Extrae los elementos de E y lístalos.
   d. ¿Cuál es la probabilidad $P(D)$?
   e. ¿Cuál es la probabilidad $P(E)$?
   f. ¿Cuál es la probabilidad $P(D \cap E)$ de tomar una bola roja en la primera extracción y una bola roja en la segunda extracción?

2. Compara $P(D \cap E)$ con el producto de $P(D)$ por $P(E)$.

Con ayuda de tu profesor, discute estos nuevos resultados con los demás compañeros del grupo. ¿Obtuvieron conclusiones que coinciden con las de las actividades anteriores? Si no es así, analicen cuál fue la causa y efectúen las correcciones necesarias. En caso de requerirlo, acudan a su profesor.

PARA SABER MÁS

La probabilidad es algo cotidiano en nuestra vida; por ejemplo, cuando se adquiere una computadora, un refrigerador o un teléfono móvil. Todos estos artículos tienen una vida promedio calculada con base en la probabilidad. A partir de ese cálculo los fabricantes extienden su tiempo de garantía. Lo mismo si se trata de un refrigerador que de un automóvil, la probabilidad de que ocurra un desperfecto aumenta notablemente cuando vence el periodo de garantía.

En la física de las partículas, hasta el día de hoy no se puede observar a un electrón o protón, sólo se sabe de su existencia por medio de sus efectos. Así, la posición de los mismos se calcula con base en la probabilidad, de ahí nace la física estadística.

Cualquier examen médico o de laboratorio tiene un cierto grado de incertidumbre, así que con una cierta probabilidad de éxito los médicos dan un diagnóstico o un resultado clínico.

HISTORIA DE LAS PALABRAS

La palabra "aleatorio" proviene del latín "*alea*" que se refiere a "dado", y a su vez la palabra "dado" se refiere al azar. El sufijo "*-torio*" significa "pertenencia". De esta manera, el comando "selección aleatoria" en el iPod elige al azar una pista. La tecla con la palabra en inglés *random* (aleatorio) en la calculadora genera números al azar.

TIC

Encuentra un simulador para lanzar cuatro monedas al aire al mismo tiempo en: http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/azar_monedas4.htm (consultado el 17 de marzo de 2016).

En el recuadro del simulador, en el ángulo inferior izquierdo se encuentra una pequeña flecha que lo pone en marcha. Con el mismo botón puedes dar pausa en cualquier momento. En la tabla de la derecha podrás observar la frecuencia absoluta respecto a la probabilidad de obtener desde 0 hasta 4 caras en cada lanzamiento. Si echaras volados arrojando 4 monedas, ¿cuál sería tu apuesta?

PARA SABER MÁS

Dos eventos de probabilidad A y B son independientes si lo que suceda en un evento no afecta a lo que suceda en el otro y se comprueba que $P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$.

PARA RESOLVER

Se lanzan dos dados, uno rojo y otro verde, y se anota el número que aparece en cada dado.

1. Determina los elementos del espacio muestral $\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3)...\}$
2. Sea A el evento "el dado rojo arroja un número par" y B el evento "el dado verde arroja un número impar", responde.
   a. Determina los elementos de A como subconjunto de Ω subrayándolos con tinta roja de la lista de Ω.
   b. Determina los elementos de B como subconjunto de Ω subrayándolos con tinta azul de la lista de Ω.
   c. Determina los elementos de $A \cap B$ como subconjunto de Ω subrayándolos con tinta negra de la lista de Ω.
3. Calcula $P(A)$.
4. Calcula $P(B)$.
5. Calcula $P(A \cap B)$.
6. Compara $P(A \cap B)$ con el producto de $P(A)$ por $P(B)$.
   a. ¿Qué puedes concluir de este resultado? ¿Son dependientes o independientes los eventos A y B?

Con ayuda de tu profesor, comenta tus resultados con el resto del grupo.

REFLEXIONA

¿Influye el resultado de un sorteo anterior en el resultado del sorteo actual de la Lotería Nacional? Justifica tu respuesta.

MATEMÁTICAS HISTÓRICAS

Girolamo Cardano fue un jugador empedernido y tramposo, pero a la vez fue el iniciador de la teoría de la probabilidad.

Girolamo Cardano (1501-1576) fue un matemático italiano que se graduó en la Universidad de Pavía y se doctoró en medicina en 1526 en la Universidad de Padua. En 1536 se trasladó a Milán, donde empezó a ejercer como profesor de matemáticas. Trabajando y publicando como matemático se doctoró en medicina y fue el primero que caracterizó la fiebre tifoidea, que por aquellos años hacía estragos en las poblaciones.

Publicó el *Ars Magna*, uno de los mejores tratados de álgebra de esa época. También publicó el primer libro sobre juegos y azar, en el que ofreció la primera aproximación sistemática a la teoría de la probabilidad y enunció la ley de los grandes números.

Para que su muerte coincidiera con su pronóstico dejó de comer, muriendo en la ruina debido a su pasión por el juego.

Fuente: *Historia de la teoría de la probabilidad*, de Pablo Salinero Ruiz

PARA TERMINAR

Un examen de opción múltiple contiene tres preguntas con tres opciones cada una: a, b y c. Cada pregunta sólo puede tener una respuesta correcta. Sea Ω el conjunto de todas las posibles repuestas al examen.

1. Lista en tu cuaderno todos los elementos del conjunto $\Omega = \{(a, a, a), (a, a, b), (a, a, c)...\}$ hasta completarlo.
   a. ¿Es un espacio equiprobable?
2. Sea A el evento "elegir opción (a, b, c) como respuestas a las tres preguntas" sea B el evento "elegir opción (a, a, a) como respuestas a las tres preguntas", responde.
   a. ¿Cuál es la probabilidad $P(A)$?
   b. ¿Cuál es la probabilidad $P(B)$?
   c. ¿$P(A)$ es distinta de $P(B)$?
   d. ¿Existe algún evento que sea más favorable que otro?

Con ayuda de tu profesor, comparte tus respuestas con un compañero. En caso de haber diferencias, analicen a qué se debieron y efectúen las correcciones necesarias.

PARA SABER MÁS

Dos eventos A y B de un espacio muestral se llaman independientes, si se cumple que la ocurrencia de uno no afecta la ocurrencia del otro. Matemáticamente, dos eventos son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Autoevaluación

Lee en la primera columna los aspectos que vas a evaluar y marca con una equis (**X**) el resultado que obtuviste de acuerdo con tu opinión. Sigue el mismo procedimiento que en los bloques anteriores.

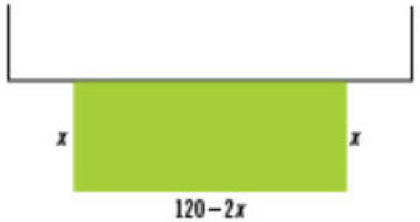
		Según mi opinión			Según la opinión de mis compañeros			Recomendaciones de mi profesor
		Sí	Aún tengo dudas	No	Sí	Aún tiene dudas	No	
Conocimientos y habilidades	Puedo resolver problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.							
	Puedo resolver problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.							

Evaluación

Lee y contesta las preguntas como se indica en cada caso.

Patrones y ecuaciones

3.1 Se quiere levantar una barda de paneles de cemento alrededor de un terreno rectangular de 1800 m² que está junto a un edificio. Debido a que se cuenta con 120 m lineales de material, sólo se van a considerar tres lados del terreno y se aprovechará la pared del edificio.



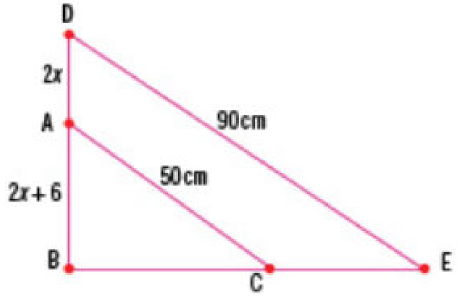
PREGUNTA 1 ¿Cuál de las ecuaciones siguientes es la adecuada para resolver este problema?

a. $(120+x)\,2x=1800$
b. $(120-x)\,2x=1800$
c. $(120-2x)\,x=1800$
d. $(120-2x)\,2x=1800$

PREGUNTA 2 ¿Cuánto miden las dimensiones del terreno?

Figuras y cuerpos

3.2 Uno de los criterios de semejanza establece que dos triángulos son semejantes si sus lados son respectivamente proporcionales.



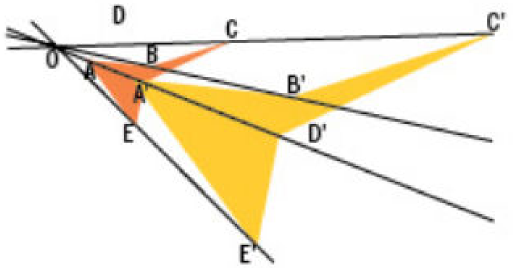
PREGUNTA 3 ¿Cuánto miden los lados de los triángulos ABC y DBE?

3.3 Ana, Néstor, Raúl, Arturo y José ganaron el concurso "De la Secundaria a la Antártida" en 2012 y se tomaron una fotografía antes de abordar el avión.

En aquel momento, Ana medía 1.60 m de altura y en la fotografía 3.5 cm.

PREGUNTA 4 Si dos de sus compañeros medían 3.60 cm y 3.20 cm en la fotografía, ¿cuánto miden realmente?

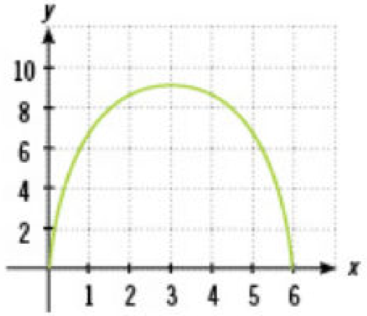
3.4 El polígono ABCDE se transforma en el polígono A'B'C'D'E' y el centro de homotecia de ambos polígonos está en el vértice O a una razón de 5:2.



PREGUNTA 5 Si los lados AB, BC, CD, DE y EA miden 2.6 cm, 3.45 cm, 3.86 cm, 1.85 cm y 3.44 cm, respectivamente, ¿cuánto miden los lados del polígono A'B'C'D'E'?

Proporcionalidad y funciones

3.5 La gráfica siguiente representa el área de un rectángulo en función de la medida de la base cuando el perímetro es constante.



PREGUNTA 6 ¿Cuánto mide el perímetro del rectángulo? Justifica tu respuesta.

PREGUNTA 7 ¿Cuál es la máxima área del rectángulo?

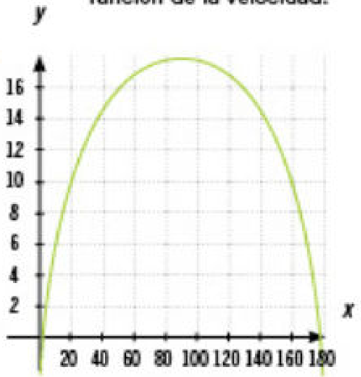
a. 8 cm² b. 8.75 cm² c. 9 cm² d. 8.6 cm²

3.6 Una empresa automotriz puso a prueba un nuevo automóvil y comprobó que para las velocidades mayores a 10 km/h y menores que 150 km/h el rendimiento de gasolina se relacionaba con la velocidad por medio de la función:

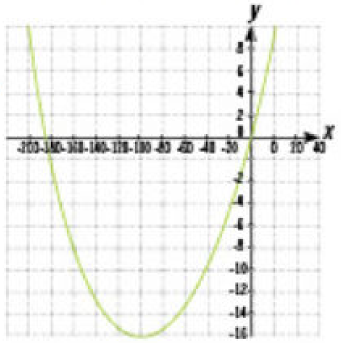
$$r=-\frac{1}{500}v^2+\frac{9}{25}v$$

PREGUNTA 8 Determina cuál de las gráficas representa el rendimiento de gasolina en función de la velocidad.

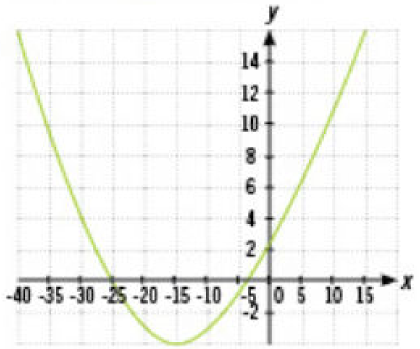
a.



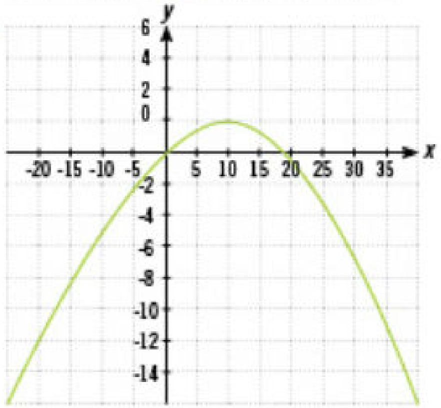
b.



c.



d.



Nociones de probabilidad

3.7 En las máquinas tragamonedas se inserta una cantidad de dinero o de fichas y se jala una palanca o se oprimen uno o varios botones. Cuando coinciden los mismos números o figuras se gana un premio.

PREGUNTA 9 Suponiendo que una máquina tragamonedas consta de tres círculos, cada uno numerado del 1 al 6, ¿cuál es la probabilidad de que al accionar la máquina coincida el número 5 en los tres círculos?

BLOQUE 4

Aprendizajes esperados

Al finalizar este bloque, serás capaz de lo siguiente.

- Utilizar en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión.
- Resolver problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
- Calcular y explicar el significado del rango y la desviación media.

SEMANA	TEMA	SUBTEMA
EJE: SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO		
1	Patrones y ecuaciones	**4.1** Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.
EJE: FORMA, ESPACIO Y MEDIDA		
2	Figuras y cuerpos	**4.2** Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.
3	Medida	**4.3** Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.
4		**4.4** Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.
5		**4.5** Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
EJE: MANEJO DE LA INFORMACIÓN		
6	Proporcionalidad y funciones	**4.6** Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.
7	Análisis y representación de datos	**4.7** Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media).
8		**4.8** Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.
EVALUACIÓN		

Para construir una carretera no basta con aplanar el terreno y colocar asfalto. Los ingenieros necesitan dominar aspectos físicos y matemáticos para la planeación y construcción de los caminos. En las montañas, las carreteras necesariamente suben y bajan. Los automovilistas hablan de "pendientes" muy inclinadas o poco inclinadas. ¿Qué entiendes por pendiente?, ¿qué relación tiene la pendiente con la inclinación?, ¿puedes explicar cómo calcular una pendiente?

SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO

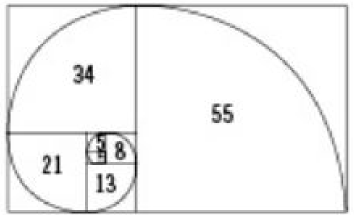
LECCIÓN 1

OBTENCIÓN DE UNA EXPRESIÓN GENERAL CUADRÁTICA PARA DEFINIR EL ENÉSIMO TÉRMINO DE UNA SUCESIÓN

Desde tiempos inmemoriales la humanidad ha tratado de predecir sucesos y acontecimientos, lo que se puede lograr observando lo que se encuentra a nuestro alrededor y descubriendo o reconociendo distintos patrones y estructuras; por ejemplo, ¿sigue algún patrón la coraza de un caracol?

Una vez que se han obtenido esos datos, se establece una ley o expresión algebraica que represente el fenómeno. En algunos casos, los patrones se muestran de manera reiterada conformando una sucesión.

- ¿Cómo identificas cada uno de los términos de una sucesión?
- ¿Cuál es el primer término y cuál es el término subsecuente en una sucesión?
- ¿Cómo se puede obtener la fórmula general de una sucesión para determinar cualquiera de los términos?



El trazo de la espiral se presenta en algunas formas de la naturaleza, como en los caracoles.

PARA COMENZAR

Reúnete con un compañero para resolver los problemas que se proponen.

1. Resuelvan lo que se plantea a continuación.
   a. Escriban sobre las líneas los tres términos que siguen en la sucesión $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2$, ____, ____, ____,...
   b. Escriban el undécimo término.
   c. Escriban la fórmula general que genere cualquier término de la sucesión $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2,...$
   d. Escriban el quincuagésimo término de la sucesión anterior.

2. Tracen en los recuadros las figuras 4, 5 y 6 de la sucesión de imágenes propuestas.

Continúa...

3. Respondan los cuestionamientos.
   a. En las sucesiones de los problemas 1 y 2, al término 4 respecto al 5 se le llama ____________ y al término 4 respecto al término 3 se le llama ____________.
   b. ¿Puedes calcular el término de una sucesión sin tener que calcular todos los anteriores? Justifica tu respuesta.
   c. ¿Con cuál nombre se le conoce al término general con el que se puede calcular cualquier término de la sucesión?

Con la guía de su profesor, cada pareja exponga sus conclusiones. Para terminar, lleguen a una conclusión entre todo el grupo.

Expresión general cuadrática para definir el enésimo término de sucesiones y series

Con la coordinación de tu profesor, reúnete con un compañero para desarrollar las actividades siguientes.

1. Escriban sobre los espacios la suma de las sucesiones de números. Si lo consideran necesario, pueden utilizar la calculadora.
   a. $1+2+3+4=$ ____________
   b. $1+2+3+4+5+6=$ ____________
   c. $1+2+3+4+5+6+...+9+10=$ ____________
   d. $1+2+3+4+5+6+7+8+9+...+21+22=$ ________

2. A continuación buscarán una fórmula matemática o expresión algebraica que dé como resultado la suma de los primeros números, hasta cualquier número n que deseen, sin realizar la suma. Para ello sigan el desarrollo propuesto.
   a. Llenen los espacios que definen la sucesión.
   $S(n)=1+2+$ ______ $+ ... + n-1 +$ ______
   b. Reescriban la misma sucesión, pero ahora invertida. Después vuelvan a llenar los espacios.
   $S(n)=n+$ ______ $+ n-2 + ... +$ ______ $+ 2 + 1$
   c. Sumen en el mismo orden las sucesiones anteriores (el primer término con el primer término, el segundo con el segundo y así sucesivamente). Nuevamente, llenen los espacios.
   $S(n)+S(n)=(1+n)+(2+(n-1))+$ ______ $+ ... +$ ______ $+$ ______
   d. Realicen las operaciones de suma que se indican.
   $S(n)+S(n)=(1+n)+(1+n)+... +(1+n)+$ ______
   e. Escriban el factor común a todos los términos de la derecha de la última sucesión.
   f. Factoricen la expresión empleando el método del factor común.
   $2S(n)=(1+n)(1+1+$ ______ $+$ ______ $+ ... + 1)$
   - ¿Cuántos números 1 hay?
   $2S(n)=(1+n)($______$)$

PARA SABER MÁS

Un número triangular es aquel que puede recomponerse en la forma de un triángulo equilátero. Por convención, el primer número triangular es el número 1.

Los números triangulares, junto con otros números figurados, fueron objeto de estudio por Pitágoras y los pitagóricos, quienes consideraban sagrado el número 10 escrito en forma triangular, y al que llamaban *tetraktys*.

Cada número triangular a_n está definido por la fórmula:

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Desarrollo de un número triangular mediante figuras.

PARA SABER MÁS

El término general de una sucesión permite conocer el valor de un término determinado; con esta fórmula, se conoce previamente el lugar que éste ocupa en la misma. Al término general de una sucesión se le denota por a_n y se refiere como término enésimo; por ejemplo:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, a_n = \frac{n}{n+1}$$

$$4, \frac{9}{2}, \frac{16}{3}, \frac{25}{4}, b_n = \frac{(n+1)^2}{n}$$

MATEMÁTICAS HISTÓRICAS

La sucesión de Fibonacci debe su nombre al matemático italiano Leonardo de Pisa (1170-1240), *Fibonacci*, quien describió una sucesión infinita de números enteros en la cual cada término es igual a la suma de los dos anteriores. De este modo, sea la sucesión a_n, entonces $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, si n es mayor o igual a 3 y $a_1 = a_2 = a_1$. Esta sucesión representa infinidad de situaciones prácticas y tiene diversas aplicaciones en las ciencias y el arte.

Leonardo de Pisa difundió por Europa el sistema de numeración indoarábigo que actualmente utilizamos.

Fuente: Instituto de Matemáticas de la UNAM.

g. Despejando ahora S(n) quedará:

$$S(n) = \frac{(1+n)(\_\_\_\_)}{\_\_\_\_}$$

h. Una vez realizadas las operaciones indicadas se obtiene:

$$S(n) = \frac{n^2 + \_\_}{\_\_}$$

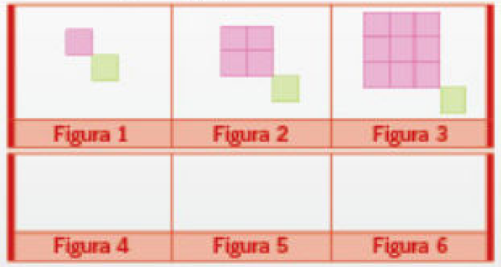
Con ayuda de su profesor, comparen su resultado con las demás parejas y lleguen a un consenso en cuanto a la fórmula obtenida.

3. Tengan presentes los datos obtenidos en las actividades anteriores para contestar las preguntas. En la sucesión $S(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1 + n$,
   a. ¿cuál es la fórmula general que permite conocer la suma de cualquier número n?
   b. ¿Cuál es la suma de los primeros 15 elementos, es decir, cuando $n = 15$?
   c. ¿Cuál es la suma cuando $n = 100$?
   d. ¿Cuál es la suma cuando $n = 227$?
   e. Si se sabe que la suma S(n) de una sucesión es igual a 1 275, es decir, S(n) = 1 275, ¿qué número n le corresponde a la suma S(n) en la sucesión?
   f. La suma de una sucesión es S(n) = 2346. ¿Será la suma de una sucesión para números enteros hasta cierta n?, ¿por qué?

Con la guía de su profesor, lleven a cabo una discusión en el grupo y lleguen a un consenso respecto a los resultados obtenidos.

Reto Realiza lo que se pide.

1. En tu cuaderno traza las figuras 4, 5 y 6 que siguen en la sucesión de imágenes propuestas.



2. Traza el undécimo término.
3. Escribe la fórmula general que genere cualquier término.
4. Escribe, sin trazarlo, el término trigésimo quinto de la sucesión anterior.

TIC

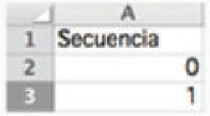
Con las herramientas de Excel es posible generar la sucesión de *Fibonacci* y construir la gráfica que la describe. El procedimiento se muestra a continuación.

1. Abre una nueva hoja de cálculo en Excel.

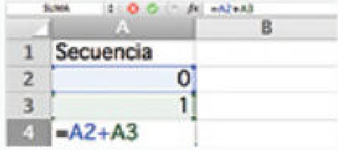
Inicio – Todos los programas – Microsoft Office – Microsoft Excel 2013

2. En la celda A1 escribe el encabezado **Secuencia**.

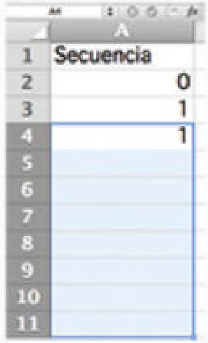
3. Escribe 0 en la celda A2 y 1 en la celda A3.

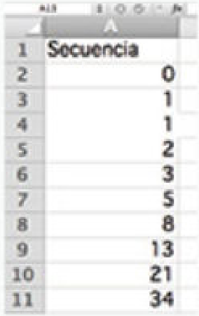


4. Haz clic en la celda A4 y escribe la fórmula **=A2+A3**. Este comando efectuará la suma del contenido de dichas celdas, en este caso, 0 y 1, dando el resultado en la celda A4 = 1.

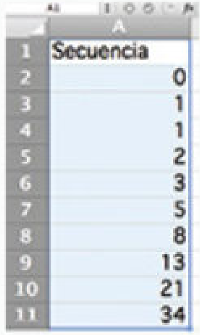


5. Haz clic en el ángulo inferior derecho de la celda y arrástralo hasta la celda A11. Al soltarlo deben aparecer los números que se muestran en la tabla.



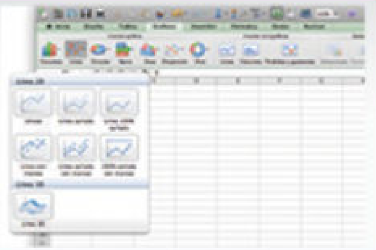


6. Selecciona el rango de celdas de A2 a A11, haciendo clic en la celda A2 y arrastra el puntero hasta la celda A11.

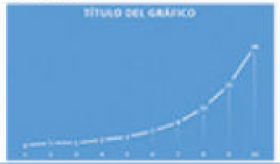


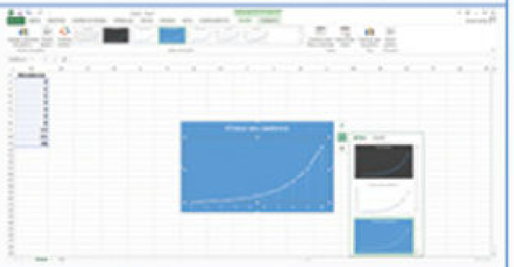
Continúa...

7. **Haz clic en el menú Insertar, Insertar gráfico de líneas , Línea con marcadores .**

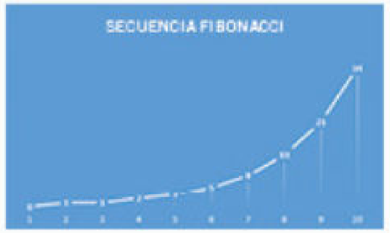


8. Haz clic en el área de la gráfica. En el menú contextual que se abre, haz clic en el icono y selecciona el estilo.





9. Haz clic en el título del gráfico y escribe **Secuencia Fibonacci.**



El término enésimo en función de una expresión cuadrática

Reflexiona las preguntas que se formulan a continuación y desarrolla una estrategia para contestarlas.

1. ¿Cuántos saludos se generan en una fiesta entre los asistentes? Por ejemplo, entre 2 personas se genera 1 saludo, entre 3 personas se generan 3 saludos.
2. ¿Cuántos saludos se generan conforme se incrementa el número de personas? Completa la información.
   a. Entre 4 personas se generan ________ saludos.
   b. Entre 5 personas se generan ________ saludos.
   c. Entre 6 personas se generan ________ saludos.

		Saludos
Carlos	Paco / Mónica	2
Paco	Mónica	1
	Total	3

Conforme aumenta el número de personas se generan cada vez una mayor cantidad de saludos.

   d. Entre 7 personas se generan ________ saludos.
   e. Entre 8 personas se generan ________ saludos.
   f. Entre 9 personas se generan ________ saludos.
   g. Entre n personas se generan ________ saludos.

3. Escribe la fórmula general que te permite conocer el número de saludos entre un número (n) de personas que llegan a una fiesta.
   a. ¿De qué grado es la fórmula general obtenida para definir el enésimo término de la sucesión?
   b. Si en la fiesta se dan 66 saludos, ¿cuánta gente llegó?
   c. ¿Cuántos saludos se darán si a la fiesta llegan 25 personas?

Reúnete con un compañero y compartan sus repuestas. Si encuentran diferencias, analicen a qué se debieron y efectúen las correcciones necesarias. De ser necesario, consulten a su profesor.

HISTORIA DE LAS PALABRAS

La palabra "sucesión" viene del latín "*successio*", formada por "*cessius*" que corresponde al participio del verbo "*cedere*" que significa "andar, marchar", el sufijo "*io*", "*ción*" que indica "acción" y el prefijo "*sub*", que significa "debajo". La "b" de sub cambió a "c" por asimilación. De esta manera, atendiendo al origen de la palabra, entendemos que sucesión es la acción y efecto (*io*) de caminar por abajo. Se refiere a heredar, con la idea de que si muere el padre, el hijo (que camina por abajo) sigue el camino trazado por su progenitor.

PARA RESOLVER

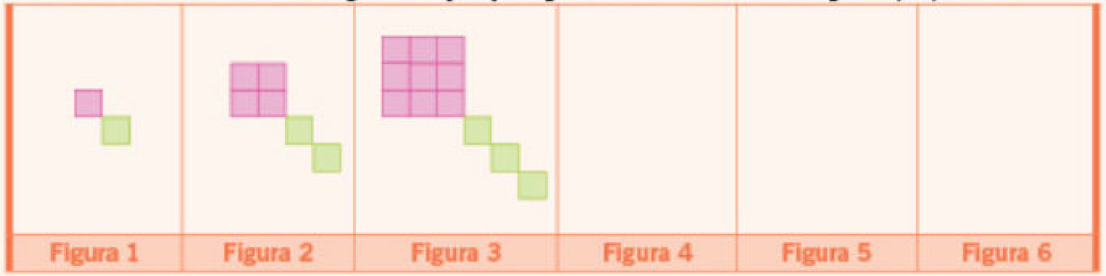
Haz lo que se indica respecto a las sucesiones.

1. Escribe los tres términos que siguen en la sucesión.

$$\frac{1^2+1}{2}, \frac{2^2+2}{2}, \frac{3^2+3}{2}, \frac{4^2+4}{2}, \frac{5^2+5}{2}, \_\_\_\_, \_\_\_\_, \_\_\_\_, ...$$

   a. Escribe el decimoquinto término.
   b. Escribe la fórmula general que genere cualquier término.
   c. Escribe el vigésimoquinto término de la sucesión anterior.

2. Traza en tu cuaderno las figuras 4, 5 y 6 que siguen en la sucesión de imágenes propuestas.



3. Resuelve lo siguiente.
   a. Traza el séptimo término.
   b. Anota la fórmula general que genere cualquier término.
   c. Escribe, sin trazarlo, el cuadragésimo término de la sucesión anterior.

Reúnete con un compañero y compartan sus respuestas. Si encuentran diferencias, analicen a qué se debieron y, con el apoyo de su profesor, corrijan lo que sea necesario.

LECTURALIA

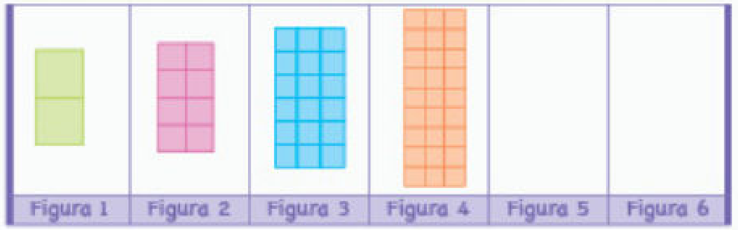
El libro *Matemática... ¿estás ahí? Sobre números, personajes, problemas y curiosidades*, de Adrián Paenza, nos muestra preguntas y enigmas de números tan grandes que son infinitos (y distintos infinitos) y de personajes que uno querría tener como amigos. He aquí una inmejorable guía para atreverte a explorar. Pon especial atención al capítulo 1, "Números". Disponible en http://mate.dm.uba.ar/~cepaenza/libro/matemati4.pdf (consultado el 17 de marzo de 2016).

Tarea en casa

Haz lo que se indica.

1. Partiendo de lo que aprendiste sobre sucesiones y números triangulares resuelve.
   a. Escribe tres números triangulares:_____, _____ y _____.
   b. Encierra en un círculo los números que sean triangulares:
      3 45 55 86 132 2346
   c. ¿Cuál es el décimo número triangular?
   d. ¿Y el decimoquinto?
   e. Escribe, sin trazarlo, el número triangular que ocupa el lugar 41.
   f. Escribe la fórmula general para obtener cualquier número triangular.

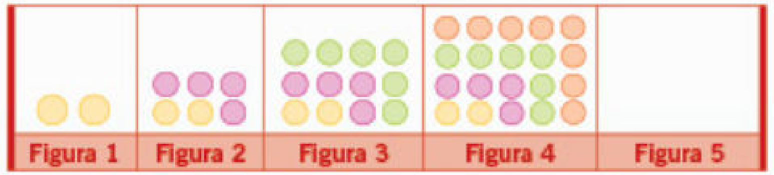
2. En tu cuaderno, traza las figuras 5 y 6 que siguen en la sucesión de imágenes propuestas y resuelve lo que se plantea a continuación.
   a. Traza el décimo término.
   b. Escribe la fórmula general que genere cualquier término de esta sucesión.
   c. Escribe, sin trazarlo, el trigésimo término de la sucesión anterior.



Reto

Analiza las imágenes y contesta lo que se te pide.

1. Observa la sucesión de figuras.



2. Con la información que aporta la sucesión de las figuras mostradas, completa la tabla y después contesta las preguntas que se plantean.

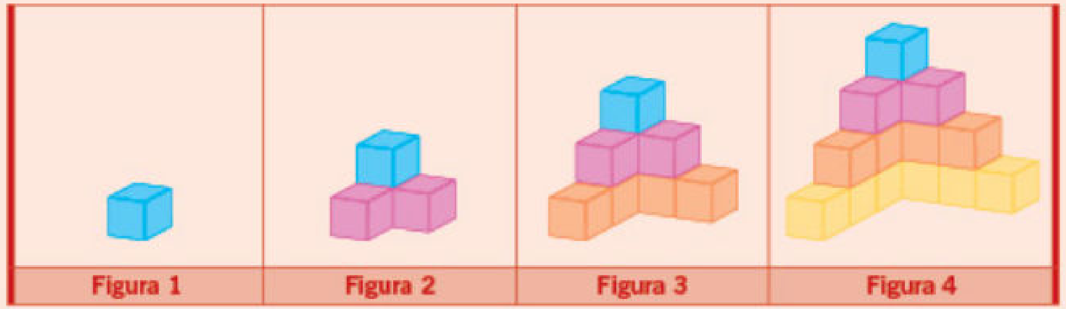
Número de la figura	1	2	3	4	5	6	n
Número de renglones que tiene la figura	1	2					
Número de puntos en cada renglón de la figura	2	3					
Total de puntos de la figura (número rectangular)	2	6	12	20			

3. Traza en el cuadro vacío cómo quedaría la figura 5 empleando color azul para los puntos que se van a añadir.
   a. ¿Cómo va creciendo la medida de la base de estas figuras rectangulares?
   b. ¿Cuánto medirán las bases de las figuras 7 y 8 que siguen en la sucesión?
   c. ¿Cómo va creciendo la medida de la altura de estas figuras rectangulares?
   d. ¿Cuánto medirán las alturas de las figuras 7 y 8 que siguen en la sucesión?
   e. ¿Qué relación hay entre la medida de la base y de la altura en cada figura?
   f. ¿Qué relación hay entre la medida de la base de cada figura y la posición que ocupa en la secuencia?
   g. ¿Cuánto medirá la base de la figura que se halla en la posición n de la sucesión?
   h. ¿Cuánto medirá la altura de la figura que se halla en la posición n de la sucesión?
   i. ¿Cuántos puntos se formarán con la figura que se halla en la posición n?

4. Escribe la regla para obtener el total de puntos de la figura de la sucesión que está en la posición n.
   a. ¿Es cuadrática o lineal la expresión algebraica que corresponde al total de puntos de la figura n? Justifica tu respuesta.

PARA TERMINAR

Analiza la sucesión de figuras y después resuelve lo que se solicita.



1. En tu cuaderno, traza la figura 5 que continúa la sucesión mostrada. Decide qué color emplearás para la nueva fila de cubos.
   a. ¿Cuántos cubos violeta tiene la figura 2?
   b. ¿Cuántos cubos anaranjados tiene la figura 3?
   c. ¿Cuántos cubos amarillos tiene la figura 4?
   d. ¿Cuántos cubos trazaste en la última fila de la figura 5?
   e. ¿Cuántos cubos tendrá la figura 50 de la sucesión?
   f. ¿Cuál es la fórmula general que permite conocer el número de cubos de cualquier figura que se presente en la sucesión mostrada?

2. Si sabemos que una de las figuras que forman la sucesión tiene 2025 cubos, ¿qué número corresponderá a esa figura en la sucesión?

Reúnete con un compañero y comparen sus respuestas. Si no coinciden, encuentren la causa y, con el apoyo de su profesor, efectúen las correcciones necesarias.

FORMA, ESPACIO Y MEDIDA

LECCIÓN 2

ANÁLISIS DE LAS CARACTERÍSTICAS DE LOS CUERPOS QUE SE GENERAN AL GIRAR SOBRE UN EJE, UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO, UN SEMICÍRCULO Y UN RECTÁNGULO. CONSTRUCCIÓN DE DESARROLLOS PLANOS DE CONOS Y CILINDROS RECTOS

Los carpinteros, torneros y alfareros tienen en común una técnica para realizar su labor (imágenes a, b y c). ¿Puedes indicar cuál es?

Muchos objetos geométricos que observas a tu alrededor tienen características similares; por ejemplo, los balaustres de los barandales de una escalera, los tornillos, los tanques de gas, las tolvas, entre muchos otros.

- ¿Cómo construirías un cilindro para contener algún material?
- ¿Cuánto material se requiere para construir una tolva?

a.

b.

c.

Diferentes tipos de tornos.

PARA COMENZAR

Con la guía de tu profesor, reúnete con un compañero para realizar las construcciones que se proponen.

1. Tracen sobre un pedazo de cartulina un triángulo, un rectángulo y un semicírculo, dejando en el borde de las figuras una pequeña pestaña.
2. Recorten las figuras y fijen en las pestañas tres lápices con cinta adhesiva, como se ilustra en el montaje de las figuras.

Montaje de las figuras geométricas en el lápiz.

Continúa...

3. Tomen entre sus manos cada lápiz y háganlo girar repetidamente. Observen qué figuras geométricas se forman y llenen la tabla.

Figura recortada	Figura observada al girar el lápiz
Rectángulo	
Triángulo	
Semicírculo	

Con ayuda de su profesor, comenten sus resultados con otra pareja de compañeros y verifiquen si llegaron a las mismas conclusiones.

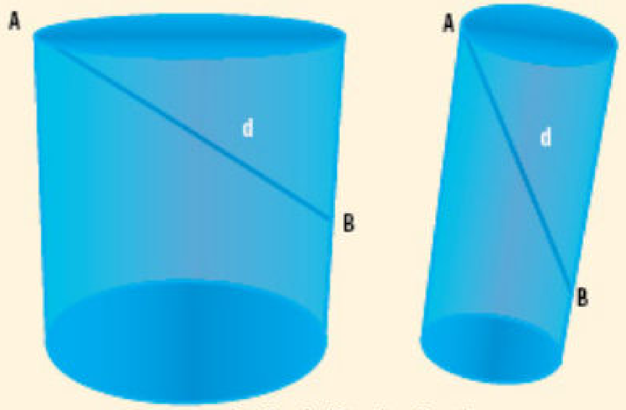
MATEMÁTICAS HISTÓRICAS

Cuando el astrónomo y matemático Johannes Kepler (1571-1630) encargó un barril de vino, con motivo de sus segundas nupcias, se enfadó enormemente al ver la manera en que el comerciante medía la capacidad del barril.

Para calcular el precio, el mercader midió el barril insertando una regla desde el agujero del tapón A hasta que llegó a la tapa en B. A la distancia AB se le representa por d.

A partir del valor de d, el mercader decidió el precio. Kepler apreció que un barril alto y delgado podía tener el mismo valor para d que un barril más ancho, el precio sería el mismo y obviamente la cantidad de vino iba a ser muy diferente.

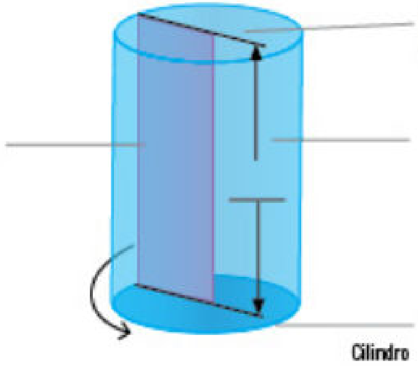
Pensando un poco más en un modo de usar d para determinar el volumen, Kepler aproximó el barril a la forma de un cilindro, donde r era el radio de la base y h era la altura. A partir de esta aproximación, hizo un cálculo de cómo debería ser la altura h del barril para que el volumen del mismo fuera el mayor posible, permaneciendo fijos los valores de r y d.



Barriles de diferentes diámetros.

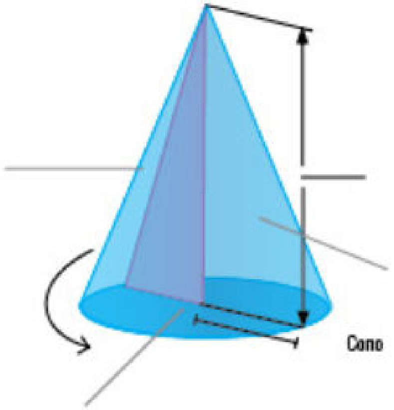
Fuente: Mathematical Association of America.

Cuerpos que se generan al girar sobre un eje: sólidos de revolución

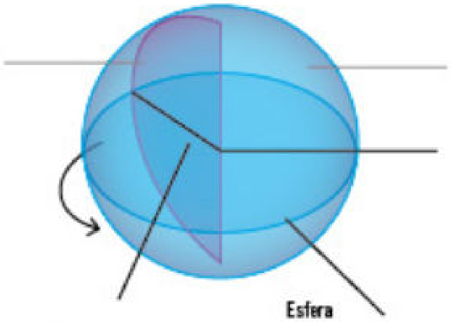


Identifica los componentes en cada una de las figuras de la izquierda; escribe en las líneas el nombre que corresponda a la parte indicada.

Bases. Son círculos congruentes que tienen el mismo radio.
Directriz. Es aquella línea que determina el recorrido que debe seguir la generatriz.
Superficie cilíndrica. Es la superficie lateral del cilindro. Extendida en un plano tiene la forma de un rectángulo.
Generatriz. Es la línea que, a causa de su movimiento, forma una figura geométrica. Depende de la directriz.
Altura. Es la distancia perpendicular entre las bases.



Superficie cónica de revolución. Es aquella que corresponde a la superficie lateral del cono.
Generatriz. Es la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyo giro alrededor de uno de sus catetos genera el cono.
Altura. Es la distancia del vértice a la base. Su longitud coincide con la del cateto que sirve de eje de giro para generar el cono.
Directriz. Es aquella línea que determina el recorrido que debe seguir la generatriz.
Base. Está formada por un solo círculo, con su radio y su diámetro correspondientes.



Superficie esférica. Es la superficie externa de la esfera.
Radio. Es un segmento que une el centro con cualquier punto de la superficie esférica.
Directriz. Es aquella línea que determina el recorrido que debe seguir la generatriz.
Centro. Es el punto que equidista de cualquier punto de la superficie esférica.
Generatriz. Es la curva cuyo giro genera la esfera.
Circunferencia máxima. Es aquella circunferencia cuyo radio es igual al radio de la esfera.

HISTORIA DE LAS PALABRAS

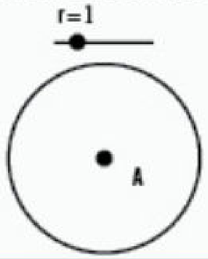
La palabra "cono" proviene del griego "*conus*", que significa "peonza". ¿Sabes qué es una peonza? Seguramente haz jugado alguna vez con una de ellas.

Con ayuda del profesor, discute tus respuestas con tus compañeros. Si descubren alguna diferencia, revisen a qué se debió y efectúen las correcciones necesarias.

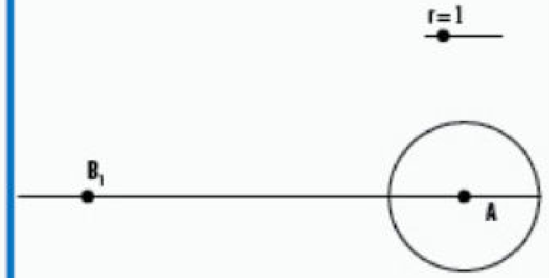
TIC

En GeoGebra es posible efectuar el desarrollo plano de un cono o de un cilindro. Sigue las instrucciones y efectúa tu propio desarrollo.

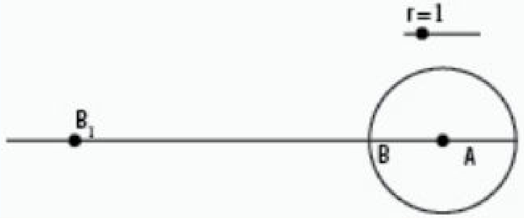
1. Con el uso de la herramienta **Deslizador**, traza el deslizador r con un valor inicial de 1 y un valor final de 10. Con la herramienta **Circunferencia dados su centro y radio** traza una circunferencia con centro en A y radio r.



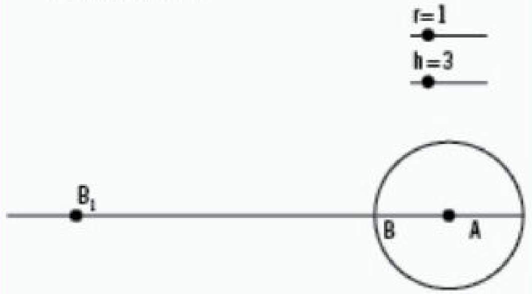
2. Define el punto B_1. Después, con la herramienta **Recta que pasa por dos puntos** traza la recta que pasa por los puntos A y B_1.



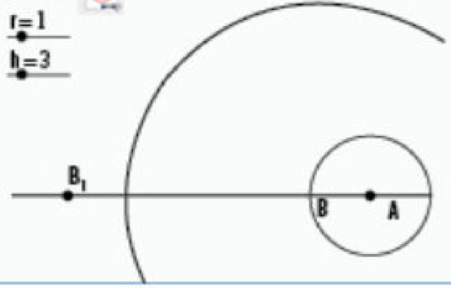
3. Marca con el punto B la intersección de la circunferencia con la recta. Traza el segmento AB usando las herramientas **Intersección entre dos objetos** y **Segmento entre dos rectas**, respectivamente.



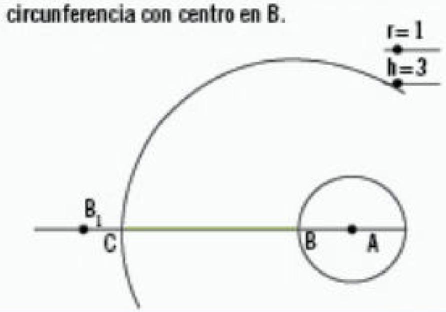
4. Crea el deslizador h con la herramienta **Deslizador**. Configúralo con un valor inicial de 1 y un valor final de 10.



5. En la barra de entrada escribe el comando **Entrada: generatriz=(h^2+r^2)^(1/2)**. Traza una circunferencia con centro en B y radio generatriz, con la herramienta **Circunferencia dados su centro y radio**.

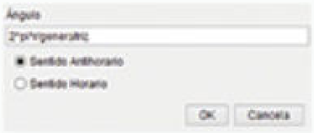


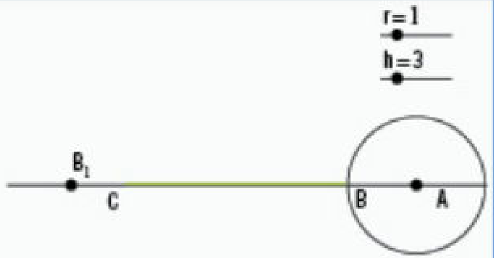
6. Usando las herramientas **Intersección entre dos objetos** y **Segmento entre dos rectas**, marca el punto C y traza el segmento BC. Oculta la circunferencia con centro en B.



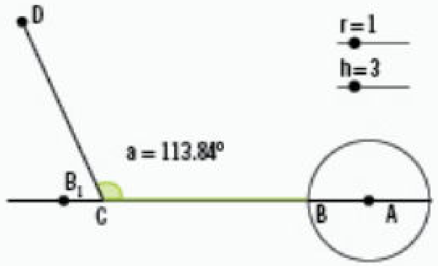
Continúa...

7. Con la herramienta **Ángulo dada su amplitud**, haz clic sobre el punto C y escribe en el cuadro de texto la expresión: **2*pi*r/generatriz**.

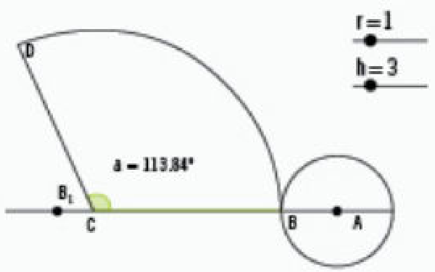




8. Une los puntos C y D con un segmento y marca el ángulo B_1CD con las herramientas **Segmento entre dos rectas** y la herramienta **Ángulo**, respectivamente.



9. Oculta la recta que pasa por los puntos A y B_1. Con la herramienta **Arco de circunferencia con centro en dos puntos**, traza un arco de circunferencia con centro en C, que pase por los puntos B y D. A continuación, con la herramienta **Distancia o longitud** mide el perímetro del arco de circunferencia y la circunferencia.



10. Modifica el valor de los deslizadores, eligiendo otras medidas.
    a. Imprime en papel opalina o cartoncillo el desarrollo del cono y con cuidado recorta y arma tu propio cono.
    b. Identifica en él todas las medidas y compáralo con los de tus compañeros.
    c. ¿Con qué medida del cono está relacionado el valor de h?

11. Intenta hacer el desarrollo plano de un cilindro.

12. Responde las preguntas y resuelve lo que se pide.
- ¿Cómo son entre sí el arco de circunferencia y la circunferencia? Explica por qué.
- Explica brevemente por qué el ángulo α se calcula con la expresión:

$$\alpha = \frac{2\pi r}{\text{generatriz}}$$

- En cierto momento escribiste en la barra de entrada de GeoGebra el comando "**generatriz =(h^2+r^2)^(1/2)**". ¿A qué parte del cono corresponde esta medida? Explica por qué.

Construcción de desarrollos planos de conos

El cono invertido

Las tolvas son dispositivos muy parecidos a un embudo, se utilizan con frecuencia para depositar y canalizar materiales en grano o en polvo.

Analiza la figura 1 y responde las preguntas en tu cuaderno.

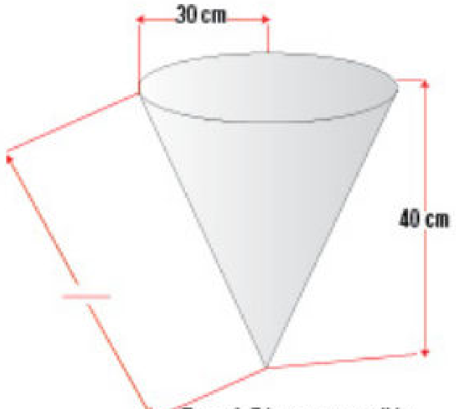


Figura 1. Tolva con sus medidas.

1. ¿A qué figura geométrica se asemeja la tolva?
   a. ¿Qué clase de triángulo se forma con la altura, el radio y la generatriz del cono?
   b. ¿Cuánto mide la generatriz del cono? Explica por qué, pero antes analiza cuánto mide la hipotenusa del triángulo de la pregunta anterior.

2. En la figura 2 se ilustran las piezas de lámina con las que se construyó la tolva. Identifica y escribe en cada una de ellas las medidas de g y r.
   a. ¿A qué parte del cono corresponde el círculo verde?
   b. ¿Cuánto mide la circunferencia en color verde? Explica por qué.
   c. ¿A qué parte del cono corresponde el sector circular de color azul?
   d. ¿Cómo deben ser las longitudes del arco en azul y la de la circunferencia verde? Explica por qué.
   e. ¿Cuál es la longitud del arco en color azul?
   f. ¿Cuál es el valor del ángulo α? Verifica tu resultado midiendo el ángulo con un transportador.
   g. Si el radio de la circunferencia en verde es r y el radio del sector circular azul es g, escribe una expresión para calcular el ángulo α de cualquier cono. Posteriormente, describe esta relación.

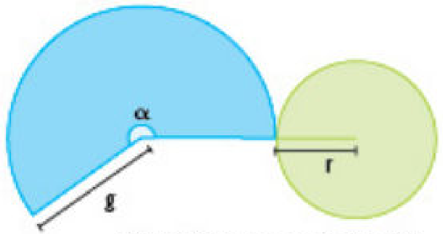


Figura 2. Piezas componentes de la tolva.

3. Completa la tabla con lo que se pide.

Perímetro de la circunferencia azul (si estuviera completa)	Longitud del arco en azul
Área de la circunferencia azul (si estuviera completa)	**Área del sector en color azul**

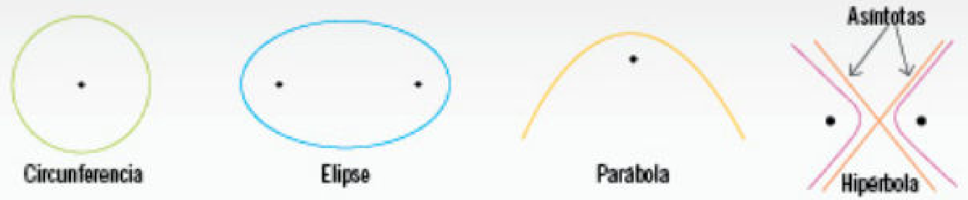
4. Establece una proporción con la información de la tabla anterior.
   a. ¿Cuál es el área A del sector circular?
   b. Si el radio de la circunferencia verde es r y el radio del sector circular azul es g, escribe una expresión para calcular el área lateral de cualquier cono.

c. Escribe una expresión matemática que permita calcular el área total de un cono y describe con palabras esta relación.

Comenta tus respuestas con otros compañeros. Si hay diferencias entre las respuestas, analicen a qué se debieron y, con ayuda de su profesor, efectúen las correcciones necesarias.

PARA SABER MÁS

Las secciones cónicas reciben este nombre porque se obtienen al realizar cortes en un cono recto. Existen cuatro tipos posibles de secciones cónicas: la circunferencia, la elipse, la parábola (el camino de un proyectil en el vacío) y la hipérbola, que está formada por dos ramas curvas que se aproximan a dos líneas rectas llamadas asíntotas, sin tocarlas.



AFORISMOS

"Pero vanas y llenas de errores me parecen aquellas ciencias que no nacen de la experiencia, madre de toda certidumbre, ni terminan en una noción experimental, es decir, tales que, ni su origen ni su medio ni su fin pasan por ninguno de los cinco sentidos."

Leonardo da Vinci (1452-1519), humanista y científico florentino.

¿Consideras que la geometría lograría cumplir con las exigencias de Leonardo da Vinci? Explica por qué.

LECTURALIA

Un tornero en aprietos, un problema sin resolver y todo un reto matemático, esto y más en el capítulo 12 del libro *Geometría Recreativa*, de Yakov Perelman. Disponible en http://www.librosmaravillosos.com/geometriarecreativa/ (consultado el 17 de marzo de 2016).

PARA RESOLVER

Lee el planteamiento y resuelve.

Uno de los recursos naturales más valiosos es el petróleo, ya que de él se derivan numerosos productos, entre ellos, la gasolina, el diésel, los plásticos y muchos otros. Los países determinan sus exportaciones e importaciones de petróleo en la unidad denominada "barriles de petróleo", además de que, efectivamente, el petróleo usualmente se comercializa en barriles.

1. Atendiendo a las medidas de la figura 1, contesta las preguntas en tu cuaderno.
   a. ¿Cuánto mide la altura del barril?
   b. ¿Cuánto mide su radio?
   c. ¿Cuánto mide su volumen?

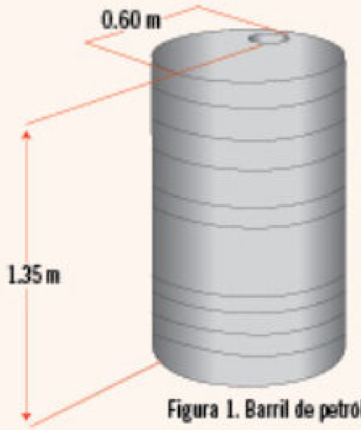


Figura 1. Barril de petróleo.

Continúa...

2. En la figura 2 se muestran las partes de lámina con las que se construye un barril de petróleo. Anota cada una de las medidas con la información que se te proporcionó en la primera figura y después contesta lo siguiente.
   a. ¿Cuánto miden el ancho y el largo de la lámina rectangular? Explica por qué.
   b. ¿Cuánto mide el área lateral del cilindro? Explica por qué.
   c. ¿Cuánto mide el área de sus bases?

3. Escribe una expresión matemática que permita calcular la superficie de un cilindro y úsala para calcular la del barril.

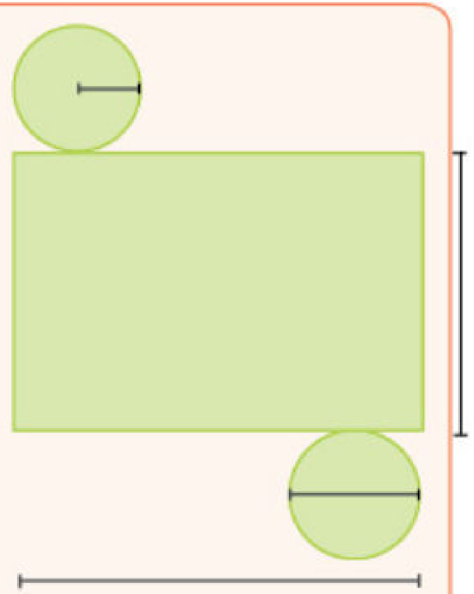


Figura 2. Cilindro desarrollado.

Con la guía de tu profesor, comparte tus resultados con el resto del grupo. Lleguen a una conclusión común.

Reto

Con cartoncillo o cartulina, construye en tu casa un cilindro que tenga una superficie total de 5 π.

Tarea en casa

Resuelve los problemas que se plantean a continuación.

1. En un depósito en forma de cono invertido se almacenan granos. Éste mide 9 m de diámetro y tiene una altura de 4.8 m.
   a. ¿Cuántos metros cuadrados de material se requirieron para construir el depósito cónico, incluyendo la tapa?
   b. ¿Cuántos metros cuadrados se requerirán para construir el depósito cónico sin la tapa?
2. Un cilindro de gas de 30 kg tiene las medidas siguientes: 282 mm de diámetro y una altura de 1154 mm.
   a. ¿Cuántos metros cuadrados de lámina se requirieron para construir las superficies laterales del tanque de gas?
   b. ¿Cuántos metros cuadrados de lámina se requirieron para construir el tanque completo?
3. El radio de un cono mide 2 m y su generatriz 6.32 m. Calcula la altura del cono.
4. Se desea construir un cilindro con un área lateral de 314.16 cm^2. Si la altura del cilindro se estipula en 10 cm, ¿cuánto deberá medir el ancho de la lámina con la que se construirá el cilindro?
5. El área lateral de un cono es 100 m^2 y el radio de su base es 5 m. Calcula la longitud de la generatriz.

PARA TERMINAR

Los silos son construcciones que sirven como depósitos o almacenes de muchos productos, como granos, cemento o productos químicos.

1. Analiza la figura 1 y responde.
   a. ¿De qué objetos geométricos está formado el silo, considerando que la tolva en la parte inferior no está cortada?
   b. Calcula la superficie de lámina necesaria para construir el silo.
   c. Considera al radio de la tapa del silo como r, la altura del cilindro como h y la altura de la tolva como h_2.
   d. Con estas variables, escribe una expresión general que permita conocer la superficie de cualquier silo.

Compara tus respuestas con un compañero. Si existen diferencias, encuentren la causa y efectúen las correcciones necesarias.

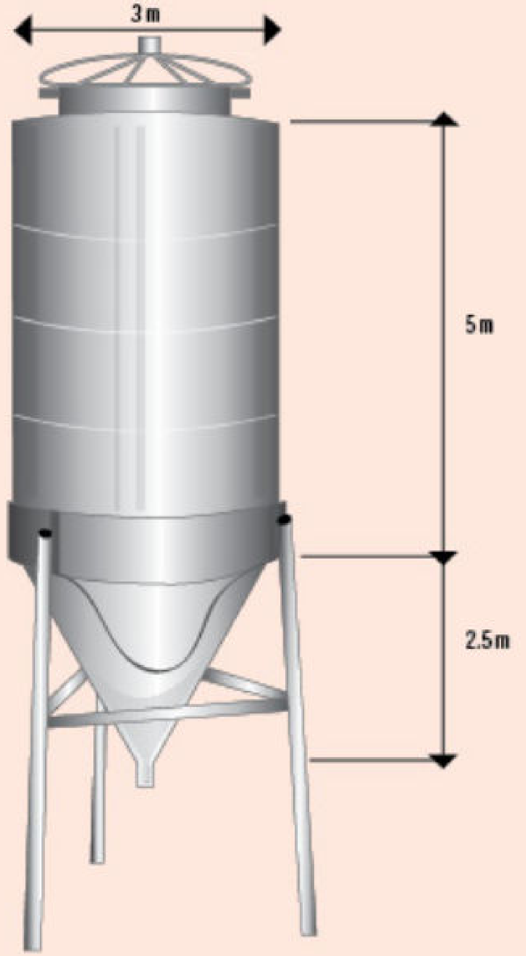


Figura 1. Silo industrial.

LECCIÓN 3

ANÁLISIS DE LAS RELACIONES ENTRE EL VALOR DE LA PENDIENTE DE UNA RECTA, EL VALOR DEL ÁNGULO QUE SE FORMA CON LA ABSCISA Y EL COCIENTE DEL CATETO OPUESTO SOBRE EL CATETO ADYACENTE

Las antiguas civilizaciones han dejado impresionantes obras de ingeniería, como fortalezas, murallas y pirámides. Estas construcciones han sobrevivido el paso del tiempo y son muestra del desarrollo de ingeniería y aplicación de las matemáticas. Un claro ejemplo de lo anterior lo constituyen las pirámides construidas por los antiguos egipcios. Observa las imágenes.

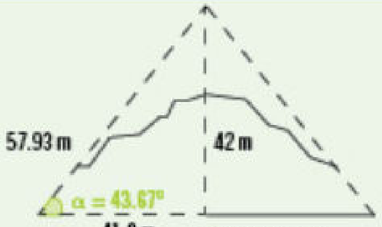
- ¿Puedes notar alguna diferencia entre estas construcciones?, ¿cuál?
- ¿Cómo crees que construyeron los antiguos egipcios estas pirámides?
- ¿Cómo emplearon las matemáticas en su construcción?

Pirámide de Giza y pirámides de Nubia en Egipto.

PARA COMENZAR

Con la coordinación de tu profesor, reúnete con un compañero para realizar las construcciones que se proponen.

1. En las figuras de la derecha se muestran las siluetas de los restos de dos pirámides egipcias, analicen y contesten las preguntas.
   a. ¿Qué diferencias observas en las medidas de las dos pirámides?
   b. ¿Cómo son los lados de ambas pirámides?
   c. ¿Cuánto mide el ángulo α en cada pirámide?



Pirámide de Jaba.

Pirámide de Zoser.

Continúa...

2. Con la información anterior, completa la tabla.

Pirámide	Jaba	Zoser
Ángulo α		
Razón (m) = $\dfrac{\text{cateto opuesto a } \angle\alpha}{\text{cateto adyacente a } \angle\alpha}$		

PARA SABER MÁS

La pendiente de una recta o segmento de recta es una medida de la inclinación de la misma con respecto a la horizontal.

a. ¿Cuál de las dos pirámides está más inclinada o con mayor pendiente en sus peldaños?
b. ¿Cómo es la razón m entre el cateto opuesto y el cateto adyacente de la pirámide más inclinada respecto a la otra?

3. Mientras más se acerque a 0 el valor de la razón m, ¿cómo será la inclinación de la pirámide?
4. Mientras más grande sea la razón m, ¿cómo será la inclinación de la pirámide?
5. ¿Recuerdas cómo representar una recta mediante la ecuación $y = mx + b$?, ¿qué representa m?, ¿qué representa b?

Con ayuda de tu profesor, reúnete con un compañero y comparen sus respuestas. En caso de haber diferencias, determinen cuál es la causa y efectúen las correcciones necesarias.

HISTORIA DE LAS PALABRAS

La palabra egipcia "*seked*" corresponde a una antigua unidad para medir inclinaciones o pendientes. En unidades modernas: 1 *seked* ≈ 51.84°.

MATEMÁTICAS HISTÓRICAS

Gracias a los papiros de Rhind y Moscú, principalmente, se conservan vestigios de las matemáticas utilizadas por los antiguos egipcios. Sus contenidos se pueden dividir en dos categorías.

- Tablas de textos con colecciones de datos matemáticos.
- Textos que muestran cómo resolver algunos problemas a los que los funcionarios y agricultores se podrían enfrentar, entre ellos, medir el área de los campos de cultivo, el volumen de graneros y dividir los alimentos, por ejemplo.

Sin duda, los problemas que más llaman la atención de estos manuscritos son los problemas del 50 al 60 del papiro de Rhind, donde se muestra claramente cómo calcular la pendiente de una pirámide utilizando la unidad egipcia *seked*.

Fuente: *Matemáticas en el antiguo Egipto*, de Ainhoa Berciano Alcaraz.

PARA SABER MÁS

La pendiente (m) corresponde a la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente, y se expresa sin unidades.

Se puede calcular a partir de la razón que se forma en cualquier triángulo rectángulo, cuya hipotenusa sea un segmento de la recta a considerar. En este caso se calcula de la siguiente manera.

$$m = \frac{\text{cateto opuesto al } \angle\alpha}{\text{cateto adyacente al } \angle\alpha}$$

Si no conocemos el valor de los catetos, pero conocemos el ángulo α de inclinación, la pendiente se puede calcular de la manera siguiente.

$$m = \tan\alpha$$

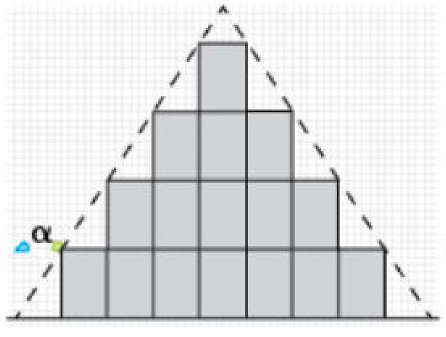
Donde tan α se lee como "tangente de alfa" y es la función trigonométrica que se define como el cociente de los catetos:

$$m = \tan\alpha = \frac{\text{cateto opuesto al } \angle\alpha}{\text{cateto adyacente al } \angle\alpha}$$

Mediante una calculadora científica que cuente con la función tangente (tan) es posible calcular el valor de la pendiente.

Relación entre la pendiente y el ángulo de inclinación

Algunos arqueólogos, con base en antiguos papiros egipcios y otros documentos, han tratado de explicar cómo se construyeron las grandes pirámides de Egipto. Según el historiador y geógrafo griego Herodoto (484 a.n.e. - 425a.n.e.), primero se construía una pirámide escalonada con bloques de piedra como se muestra en la pirámide 1.



Pirámide 1. Construcción inicial de una pirámide, según el griego Herodoto.

1. Analiza la pirámide 1 y responde las preguntas en tu cuaderno.
   a. ¿Cuánto mide de alto y de largo cada bloque de la pirámide? Considera que cada cuadro de la retícula equivale a una unidad.

2. Identifica en la figura 1 ocho triángulos congruentes.
   a. ¿Qué tipo de triángulos son?
   b. ¿Cuáles son las medidas de cada uno de sus lados?
   c. ¿Cómo es el ángulo α en todos los triángulos? Mídelo con tu transportador.

3. Calcula la razón m en todos los triángulos.
   a. ¿Cómo es esa razón?
   b. ¿Es constante la inclinación o pendiente de la recta que une las esquinas de la pirámide escalonada? Explica brevemente por qué.

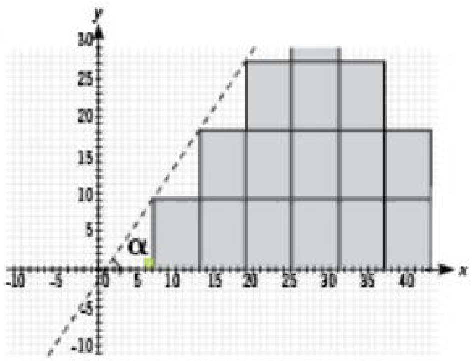


Figura 1. Porción de la pirámide referida a los ejes coordenados.

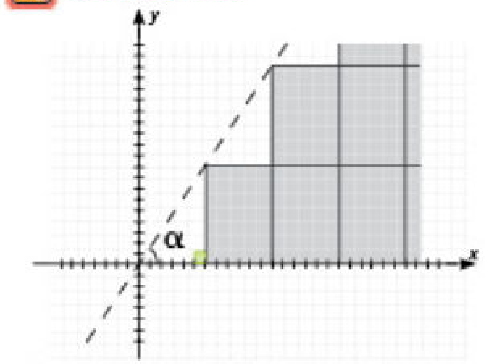
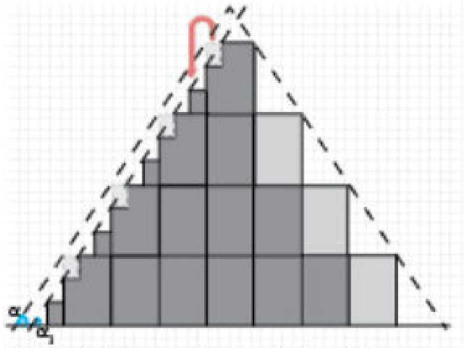


Figura 2. Porción de la pirámide referida a los ejes coordenados.

4. En la imagen figura 2 se han trazado los ejes coordenados y parte de la pirámide. Escribe la ecuación de la recta punteada.

El segundo paso en la construcción de la pirámide consistía en romper el bloque más alto, en un tercio de longitud y un tercio de altura, para obtener un nuevo bloque que, con ayuda de la gravedad, se colocaba sobre el peldaño siguiente. El proceso se realizaba de manera similar para los demás peldaños, según se muestra en la pirámide 2.



Pirámide 2. Proceso para la colocación de peldaños en una pirámide.

5. Analiza la pirámide 2 y responde las preguntas.
   a. ¿Cuántos triángulos rectángulos se formaron ahora?
   b. ¿Cuánto miden cada uno de los lados de los triángulos rectángulos?

6. Calcula la razón $m = \frac{\text{cateto opuesto a } \angle\alpha}{\text{cateto adyacente a } \angle\alpha}$ de cada uno de ellos.
   a. ¿Cómo resultó ser esta razón comparada con la que calculaste en el punto 3?
   b. ¿Es constante la inclinación o pendiente de la recta que une las esquinas de la pirámide escalonada? Explica brevemente por qué.
   c. ¿Cómo son los ángulos α y α_1?

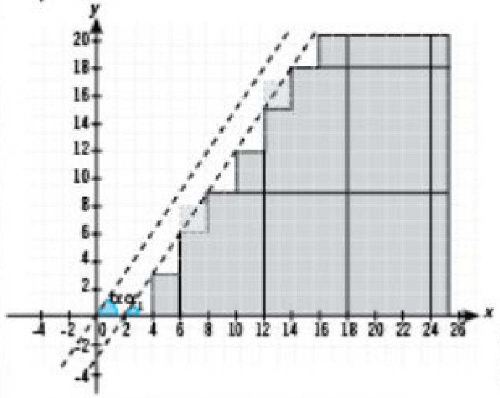
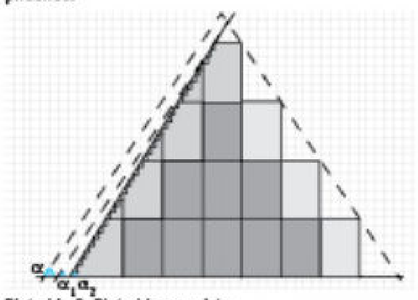


Figura 3. Rectas asociadas a la inclinación de la pirámide.

7. En la figura 3 se ha trazado un plano cartesiano junto con una sección de la pirámide. Escribe una ecuación para cada una de las rectas mostradas.

El paso anterior, romper el bloque más alto, se repetía de tal manera que la pirámide se fuera "puliendo", agregando cada vez más peldaños. De este modo la parte inferior era la última en recibir el acabado final.



Pirámide 3. Pirámide completa.

8. Analiza la pirámide 3 y responde las preguntas.
   a. ¿Qué inclinación o pendiente tendrá la pirámide final? Explica por qué.
   b. ¿Cómo son los ángulos α, α_1 y α_2? Explica por qué.

9. En la figura 4 se muestra una sección de la pirámide. Escribe en tu cuaderno las ecuaciones que representan a las tres rectas mostradas.

Con ayuda de tu profesor, reúnete con un compañero y comparen sus respuestas. Si encuentran diferencias, analicen a qué se deben y efectúen las correcciones que sean necesarias.

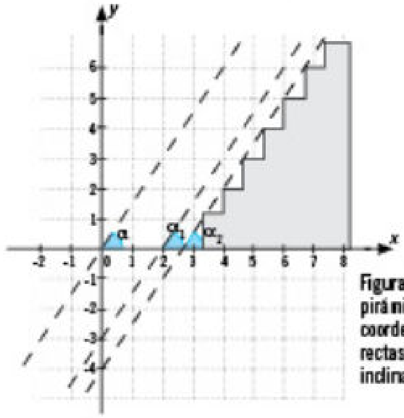


Figura 4. Sección de la pirámide referida a los ejes coordenados, mostrando rectas asociadas a la inclinación de la pirámide.

PARA SABER MÁS

La inclinación corresponde al ángulo α y se expresa en grados.

Si tenemos la razón entre los dos catetos:

$$m = \frac{\text{cateto opuesto a } \angle\alpha}{\text{cateto adyacente a } \angle\alpha}$$

Para calcular el ángulo α se utiliza la expresión siguiente.

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{\text{cateto opuesto a } \angle\alpha}{\text{cateto adyacente a } \angle\alpha}\right)$$

Expresado de otra manera:

$$\alpha = \tan^{-1} m$$

Donde $\tan^{-1}$ se lee como "tangente inversa" y se calcula con ayuda de una calculadora científica, presionando las teclas "Shift" + "tan".

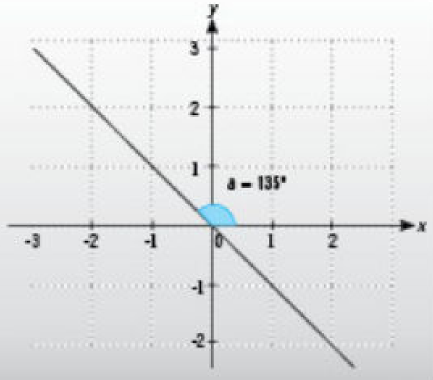
Así, para calcular el ángulo de inclinación de una recta con pendiente $m = \frac{1}{2}$, para la mayoría de calculadoras, basta con presionar las teclas "Shift" + "tan" seguido de la fracción $\frac{1}{2}$, cerrar el paréntesis y presionar la tecla "=". De inmediato, la calculadora mostrará la medida del ángulo buscado.

De esta manera, se puede concluir que el ángulo α de inclinación de una recta y la pendiente m están estrechamente ligados.

Existen diferencias en cuanto a la lógica de operación de las diferentes calculadoras científicas; por ejemplo, en algunas, la tecla "Shift" viene rotulada como "2nd", o bien, indicada mediante un color diferente al resto de las teclas.

Reto

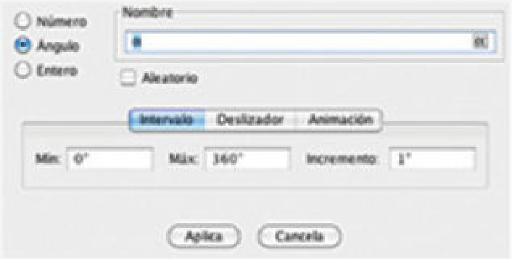
1. Usando una calculadora científica y la expresión $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{\text{cateto opuesto a } \angle\alpha}{\text{cateto adyacente a } \angle\alpha}\right)$ prueba calcular el valor de los ángulos α, α_1 y α_2 de la sección de la pirámide mostrada arriba.
2. En la imagen de la derecha se aprecia una recta en un plano cartesiano.
   a. ¿Cuál es la pendiente de esta recta?
   b. ¿Qué indica una pendiente negativa?



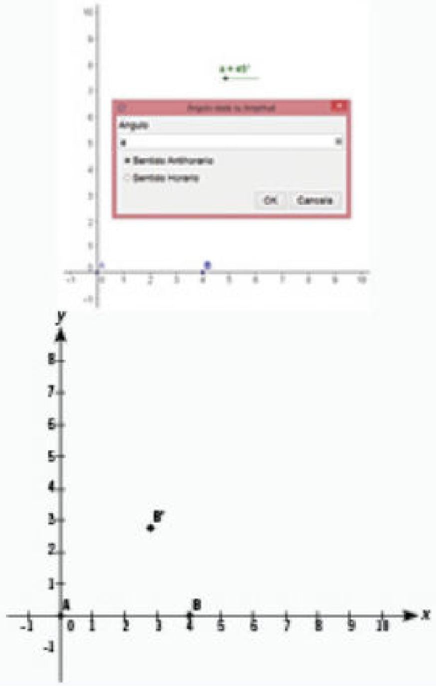
TIC

Empleando el *software* de geometría dinámica GeoGebra, analiza la relación entre ángulos con pendientes.

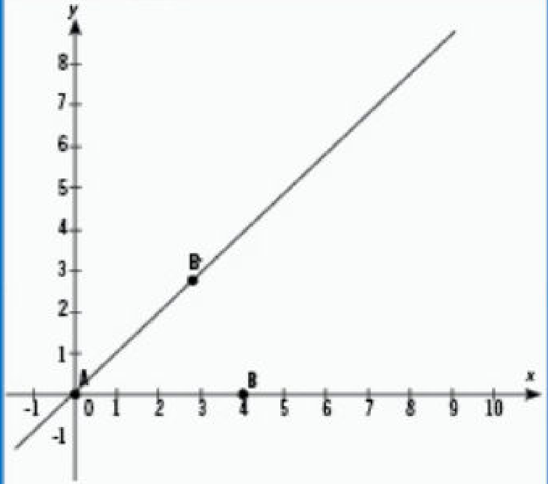
1. Con ayuda de la herramientas **Deslizador** traza el deslizador en grados con un valor mínimo de 0° y un valor máximo de 360°.



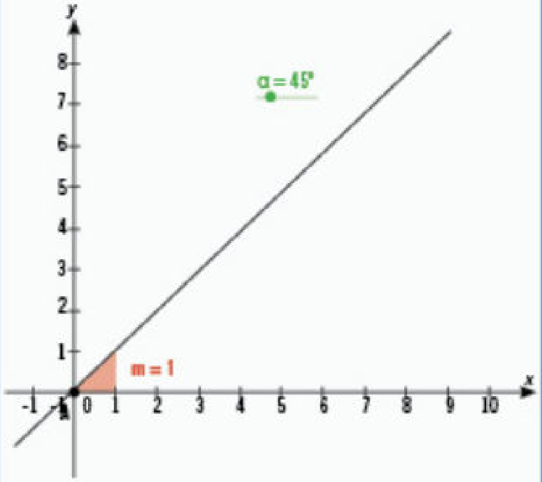
2. Con la herramienta **Punto**, marca el punto A en el origen del plano cartesiano y el punto B sobre el eje *x*. Con ayuda de la herramienta **Ángulo dada su amplitud**, haz clic sobre el punto B y después sobre el punto A. Después, escribe como ángulo el deslizador en sentido antihorario.



3. Con la ayuda de la herramienta **Recta que pasa por dos puntos**, traza una recta que pase por los puntos A y B'. Con la herramienta **Expone / Oculta Objeto** oculta los puntos B y B'.

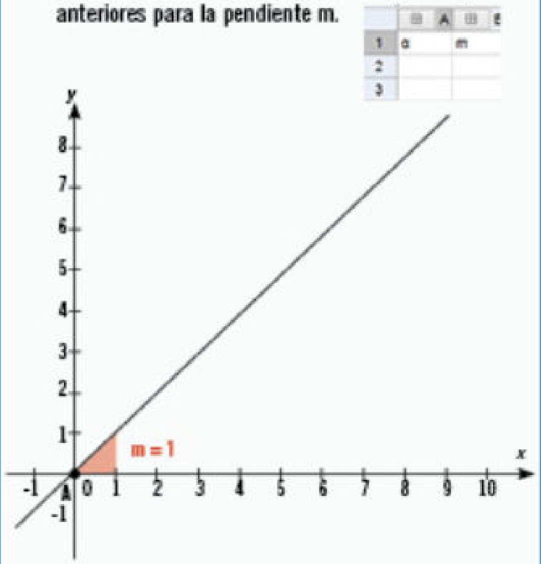


4. Selecciona la herramienta **Pendiente** y haz clic sobre la recta. Observa lo que se muestra en la pantalla.



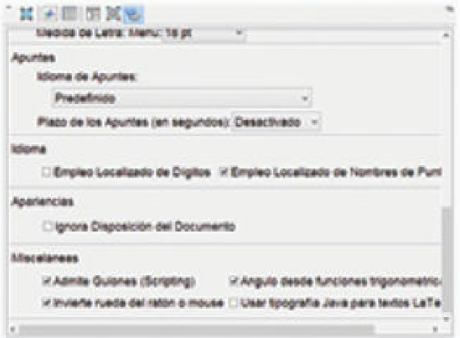
Continúa...

5. En el menú **Vista** haz clic en **Hoja de Cálculo**. Haz clic en la casilla A1 y después haz clic derecho sobre el deslizador **α**. En el menú contextual selecciona la opción **Registro en Hoja de Cálculo**. Ahora haz clic sobre la casilla B1 y repite los pasos anteriores para la pendiente m.

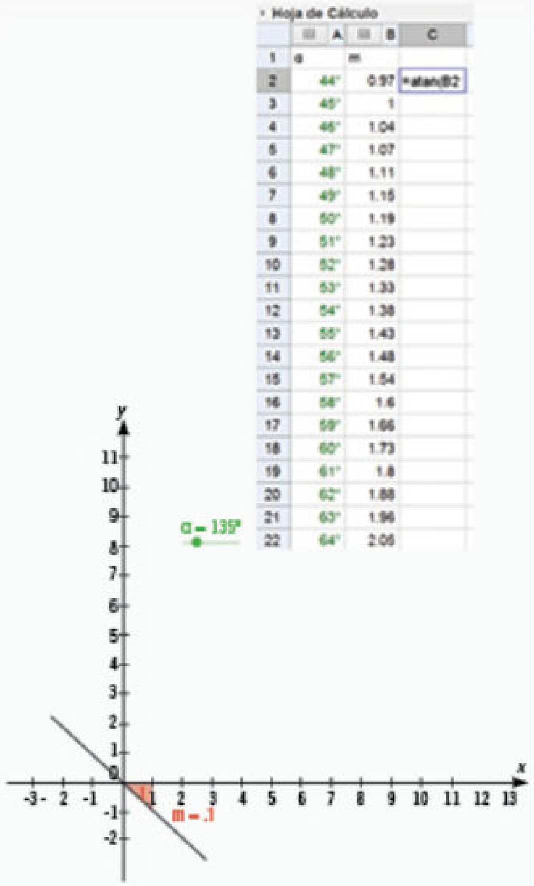


- ¿Qué sucedió con las pendientes de las rectas con ángulos $\alpha = 45°$ y $\alpha = 135°$?, ¿cómo son entre sí? Explica por qué.
- ¿Puedes hallar al menos otros dos ángulos que tengan el mismo valor de pendiente, pero con signo contrario?
- ¿Qué sucede con las pendientes de las rectas con ángulos $\alpha = 90°$ y $\alpha = 270°$? Explica por qué.
- ¿Qué sucede con las pendientes de las rectas con ángulos $\alpha = 0°$? Explica por qué.

6. Haz clic derecho sobre la hoja de cálculo y en el menú contextual elige la opción **Opciones de Hoja de Cálculo**. Haz clic en el último icono del menú (el que tiene dos engranes) y después haz clic en la opción **Ángulo desde funciones trigonométricas**.



7. Haz clic sobre la casilla C2 en la hoja de cálculo y escribe la fórmula: **= atan(B2)**



	A	B	C
1	α	m	
2	44°	0.97	=atan(B2
3	45°	1	
4	46°	1.04	
5	47°	1.07	
6	48°	1.11	
7	49°	1.15	
8	50°	1.19	
9	51°	1.23	
10	52°	1.28	
11	53°	1.33	
12	54°	1.38	
13	55°	1.43	
14	56°	1.48	
15	57°	1.54	
16	58°	1.6	
17	59°	1.66	
18	60°	1.73	
19	61°	1.8	
20	62°	1.88	
21	63°	1.96	
22	64°	2.05	

8. Vuelve a seleccionar la casilla C2 y haz clic sobre el cuadro inferior derecho en azul. Sin soltar el botón del ratón arrástralo varias casillas abajo y analiza la relación entre los ángulos y las pendientes.

	A	B	C
1	α	m	
2	44°	0.97	44°
3	45°	1	

PARA RESOLVER

Con ayuda de tu maestro, reúnete con un compañero para realizar la actividad.

1. Busquen dentro de su escuela o salón de clases algunos objetos que asemejen una recta o que se puedan aproximar a una recta; por ejemplo, las escaleras de la escuela, alguna rampa o el tensor de algún poste.
   a. Usando únicamente su regla determinen su pendiente. Expliquen brevemente en su cuaderno el procedimiento que siguieron.
   b. Calculen el ángulo de inclinación y compárenlo midiendo con su transportador dicho ángulo.

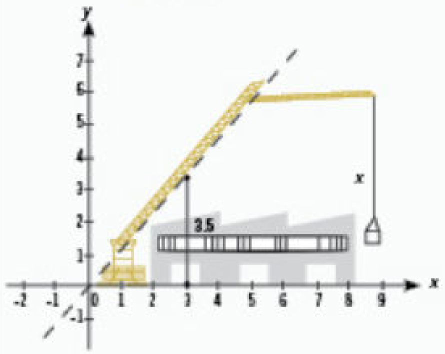
Con ayuda de su maestro, compartan sus mediciones con otras parejas. Determinen cuál fue el objeto que tuvo una pendiente mayor y cuál una pendiente menor.

Tarea en casa

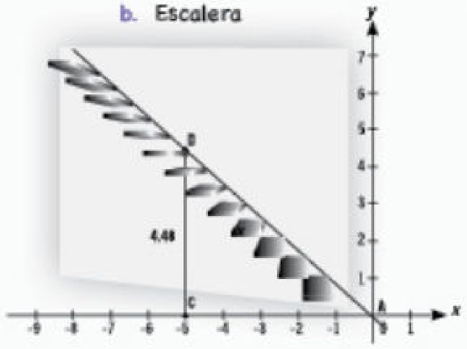
Analiza los problemas siguientes y contesta lo que se pide.

1. Calcula la pendiente y el ángulo de inclinación de cada una de las rectas.

a. Grúa



b. Escalera



c. Tejado

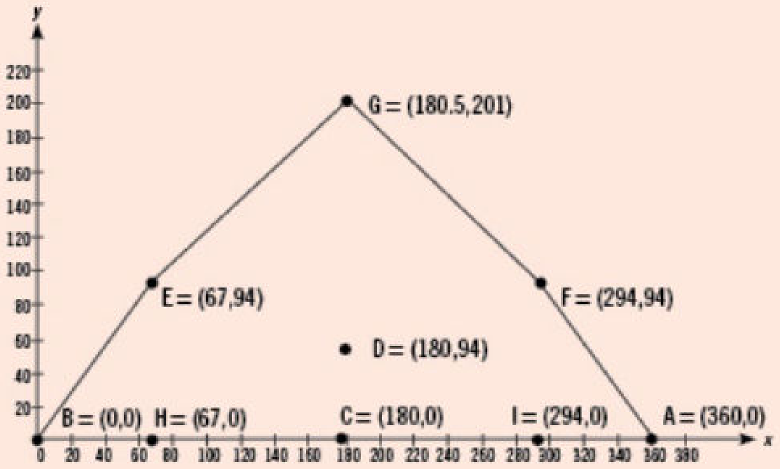
2. Traza en tu cuaderno lo que se pide a continuación.
   a. Una rampa con una pendiente $m = \frac{2}{3}$
   b. Una escalera con una pendiente $m = \frac{3}{4}$
   c. Un tejado con una pendiente $m = \frac{1}{3}$

PARA TERMINAR

Lee, analiza el planteamiento y resuelve lo que se te pide.

La imagen de abajo muestra la forma de la pirámide egipcia de Seneferu, conocida también como la pirámide acodada por su peculiar estructura. ¿Qué notas diferente en las pirámides que has analizado hasta ahora en esta lección?

Analiza la imagen y a continuación desarrolla la actividad en tu cuaderno.



Pirámide de Seneferu.

1. Traza la recta que pasa por los puntos B y E.
   a. ¿Cuál es la inclinación o pendiente de la recta BE?
   b. ¿Cómo la calculaste? Explica brevemente.
2. Traza la recta AF y calcula su pendiente.
   a. ¿Cómo resultó ser en comparación a la de la recta BE?
   b. ¿Cómo la calculaste? Explica brevemente.
3. Ahora traza la recta EG y calcula su pendiente.
   a. Compárala con la pendiente de la recta BE.
   b. ¿Cuál es mayor y cuál es menor?
   c. ¿Cómo es la pendiente de la recta BE respecto a la menos inclinada?
4. Traza la recta FG y determina su pendiente.
   a. ¿Cómo es su pendiente respecto a la recta EG?
5. Con ayuda de una calculadora científica, calcula los ángulos $\alpha = \angle HBE$ y $\beta = \angle DEG$.
   a. ¿Cuánto medirán los ángulos IAF y DFG? Explica por qué.

Reúnete con un compañero y comparen sus respuestas. Si no coinciden, encuentren la causa y efectúen las correcciones necesarias con la ayuda de su profesor.

LECCIÓN 4

ANÁLISIS DE LAS RELACIONES ENTRE LOS ÁNGULOS AGUDOS Y LOS COCIENTES ENTRE LOS LADOS DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

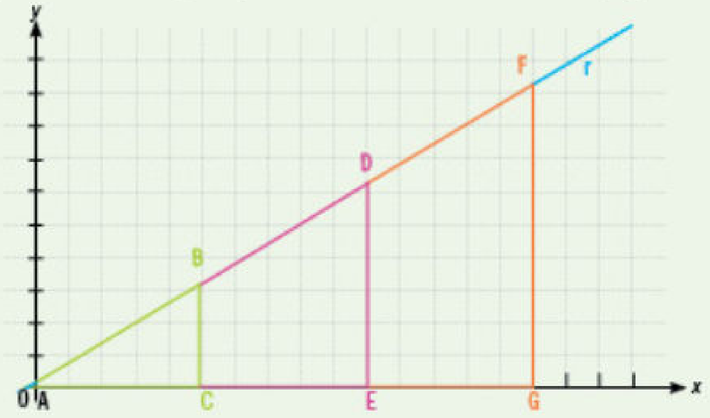
La trigonometría es una ciencia antigua que estudia las relaciones entre los ángulos agudos y las razones entre los lados de un triángulo rectángulo. Estas relaciones se denominan razones trigonométricas.

Este tipo de razones comparan las longitudes de un par de lados del triángulo recto con respecto a un ángulo agudo y se utilizan para obtener la medida de un lado o ángulo. Mediante el uso de las razones trigonométricas se puede calcular la longitud de una distancia inaccesible. Los arquitectos e ingenieros las utilizan para determinar la medida del ángulo de inclinación de una rampa o de una escalera fija o mecánica, por citar algunos ejemplos.

- ¿Qué nombre reciben los lados de un triángulo rectángulo?
- ¿De qué depende el nombre que recibe cada uno?
- ¿Puede el nombre variar?, ¿por qué razón?

PARA COMENZAR

Analiza el plano cartesiano y después contesta en tu cuaderno las preguntas que se formulan.



a. ¿Cuáles triángulos observas?
b. ¿Qué tipo de triángulos son?
c. ¿Cuánto miden los lados y los ángulos de cada triángulo?
d. ¿Cómo son entre sí los triángulos? Justifica tu respuesta.

Con ayuda de tu profesor, comenta tus respuestas con un compañero y determinen si llegaron a las mismas conclusiones.

PARA SABER MÁS

Una razón trigonométrica relaciona las medidas de dos lados de un triángulo rectángulo con respecto a uno de sus ángulos agudos.

- El seno de un ángulo A es la razón entre la longitud del cateto opuesto y la hipotenusa.
- El coseno de un ángulo A es la razón entre la longitud del cateto adyacente y la hipotenusa.
- La tangente de un ángulo A es la razón entre las longitudes de los catetos.

Lo anterior se puede expresar matemáticamente de la manera siguiente.

$$\text{sen } A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

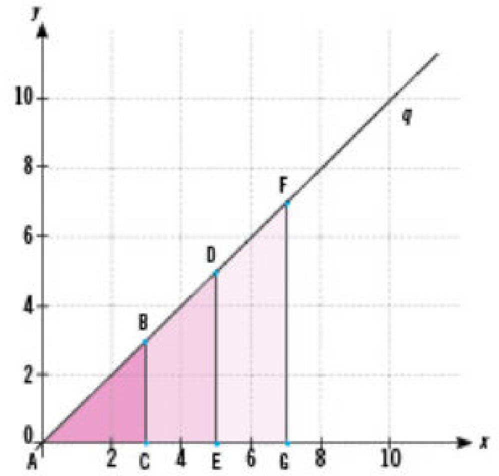
$$\tan A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Catetos e hipotenusa en un triángulo rectángulo, referidos a uno de sus ángulos agudos.

Relación entre los lados y los ángulos de un triángulo

Con la recta q se han construido tres triángulos diferentes, como se muestra a continuación.

De acuerdo con la información contenida en el plano cartesiano, completa la tabla en tu cuaderno y después contesta las preguntas que se plantean.



Triángulo	Ángulo	Cateto adyacente (c.a.)	Cateto opuesto (c.o.)	Hipotenusa (h)	$\frac{(c.o.)}{h}$	$\frac{(c.a.)}{h}$	$\frac{(c.o.)}{(c.a)}$
ABC	∠ BAC = _____	3	3	4.24	$\frac{3}{4.24}$= ____	$\frac{3}{4.24}$= ____	$\frac{3}{3}$ = ____
ADE	∠ DAE = _____						
AFG	∠ FAG = _____						

a. ¿Cómo son los cocientes entre los lados de los triángulos?, ¿a qué crees que se debe?
b. ¿Consideras que pasaría lo mismo si no fueran triángulos isorrectángulos? Justifica tu respuesta.

c. ¿Cuáles son los otros triángulos que se pueden construir en la imagen de tal forma que suceda lo mismo que con los tres anteriores?
d. ¿Cuánto mide el ángulo A que se forma entre la recta q y el eje x?
e. Utiliza la calculadora para obtener el seno, coseno y tangente de la medida del ángulo A.

Con ayuda de tu profesor, compara tus respuestas con un compañero. Si encuentran diferencias, determinen la causa y corrijan lo que sea necesario.

Reto Con base en la actividad anterior, contesta.

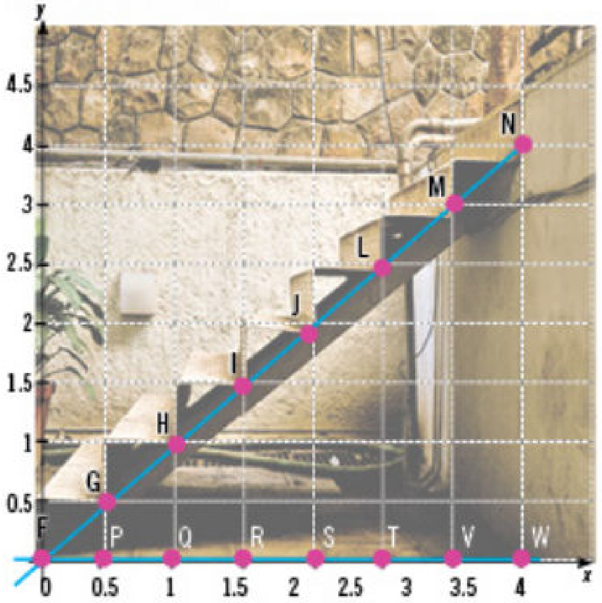
¿Cuántos triángulos rectángulos se pueden construir?, ¿por qué?

Pendiente de un objeto referida a un plano cartesiano

A Omar le gustó mucho una escalera que vio y tomó una fotografía para dársela al arquitecto que está al frente de la construcción de su nueva casa.

Para darles las indicaciones necesarias a los albañiles, el arquitecto efectuó algunos trazos sobre la fotografía, como se muestra.

Una vez realizados los trazos, el arquitecto efectuó algunas mediciones también sobre la fotografía y determinó que los segmentos FP, GP e IR miden 0.5 cm, 0.2 cm y 0.6 cm, respectivamente.



LECTURALIA

Te sugerimos leer el pasaje "Báculo de Yakov" en el capítulo 3 del libro *Geometría recreativa*, de Yakov Perelman. Lo puedes encontrar en el sitio electrónico: http://www.librosmaravillosos.com/geometriarecreativa/capitulo03.html#7 (consultado el 17 de marzo de 2016).

1. A continuación responde las preguntas que se formulan.
   a. ¿Cuánto miden $\overline{FP}$, $\overline{FQ}$, $\overline{FR}$, $\overline{FS}$, $\overline{FT}$, $\overline{FV}$, $\overline{FW}$?
   b. ¿Cuál es la longitud de $\overline{GP}$, $\overline{HQ}$, $\overline{IR}$, $\overline{JS}$, $\overline{MV}$, $\overline{NW}$ y $\overline{LT}$?
   c. ¿Cuánto miden $\overline{FG}$, $\overline{FH}$, $\overline{FI}$, $\overline{FJ}$, $\overline{FL}$, $\overline{FM}$, y $\overline{FN}$?

2. Considerando el ángulo A que se forma entre los segmentos de recta trazados, completa la tabla.

Triángulo	PFG	QFH	RFI	SFJ	TFL	VEM	WFN
sen A= $\frac{(c.o)}{h}$							
cos A= $\frac{(c.a)}{h}$							
tan A= $\frac{(c.o)}{(c.a)}$							

   a. ¿Cuánto mide el ángulo que se forma entre los segmentos de recta?

3. Traza en la imagen un segmento que sea perpendicular a la recta que está debajo de la escalera y considera el ángulo que se formó para elaborar una tabla como la anterior en tu cuaderno.
   a. ¿Cuánto mide ese ángulo?

4. Utiliza tu calculadora para obtener el seno, coseno y tangente de los dos ángulos agudos. ¿Qué observas?

Reúnete con un compañero y comparen sus respuestas. En caso de encontrar diferencias, analicen a qué se debieron y, con el apoyo de su profesor, efectúen las correcciones que sean necesarias.

HISTORIA DE LAS PALABRAS

El astrónomo y matemático hindú, Aria Bhatta (476-550) estudió el concepto de la función trigonométrica seno bajo el nombre "*ardhájya*", lo que significa mitad de una cuerda. Los árabes se referían a este término con la palabra "*jiba*" y la escribían como "*jb*", ya que omitían las vocales en la escritura. Al hacer la traducción del árabe, "*jb*" se reemplazó por "*sinus*", el cual después se convirtió en español en la palabra "seno".

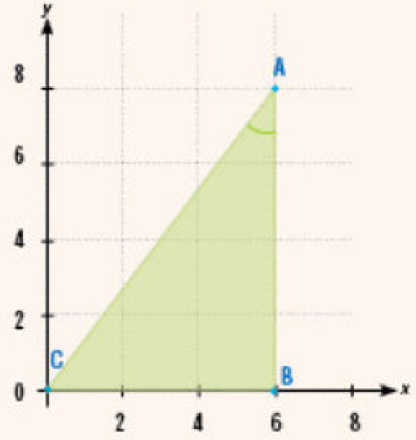
REFLEXIONA

¿Cómo son entre sí las razones trigonométricas al considerar uno u otro ángulo agudo del triángulo rectángulo?

PARA RESOLVER

En el triángulo que se muestra a continuación se sabe que el $\cos A = \frac{8}{10}$

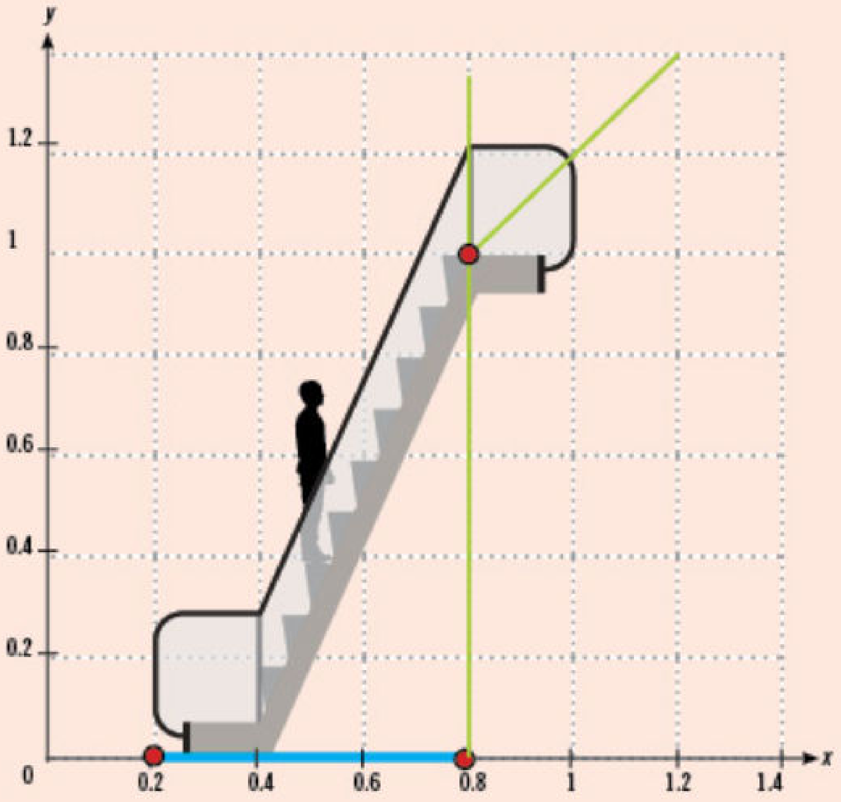
1. Con la información proporcionada, determina las otras dos razones trigonométricas.
2. ¿De qué otra forma se pueden representar las razones trigonométricas de este triángulo?



PARA TERMINAR

Lee con atención el planteamiento y desarrolla lo que se pide.

En una nueva estación del Metro se va instalar una escalera eléctrica. El responsable de la instalación de la escalera tiene mucho trabajo y le pidió a su ayudante que hiciera la primera parte. Su ayudante hizo el diseño de la escalera en un plano cartesiano de manera que el pie y la parte más alta de la escalera están en las coordenadas (0.2, 0) y (0.8, 1), como se muestra en la imagen.



1. Denota los puntos de color rojo.
2. Traza en el diseño tres segmentos de recta que sean paralelos al segmento azul.
3. Marca los puntos de intersección entre éstos y los segmentos verdes y denótalos según corresponda.
4. Mide el ángulo que se forma al pie de la escalera y las distancias de los segmentos para calcular las razones trigonométricas.
5. ¿Lo que hizo el ayudante fue correcto?, ¿por qué?

Reúnete con un compañero y comparen sus respuestas. En caso de encontrar diferencias, con el apoyo de su profesor, analicen a qué se debieron y efectúen las correcciones que sean necesarias.

LECCIÓN 5

EXPLICITACIÓN Y USO DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS SENO, COSENO Y TANGENTE

Desde la antigüedad el ser humano ha observado los astros tratando de encontrar relaciones y efectos sobre nuestro planeta, desde entonces se emplean las razones trigonométricas; por ejemplo, en la astronomía, son útiles para calcular distancias interestelares, como la distancia entre los centros de la Luna, el Sol y la Tierra.

Existen situaciones en las que se requiere obtener la medida de una longitud que no se puede medir fácilmente. Tal caso se presenta cuando se quiere conocer la altura de una palmera, un árbol, una torre o un edificio. También cuando se requiere conocer la distancia que recorre un avión, desde que empieza a descender hasta que llega a la pista de aterrizaje, o la distancia de un barco al puerto.

En geometría y trigonometría, las razones trigonométricas permiten obtener la medida de los ángulos agudos de cualquier triángulo rectángulo o la medida de un lado cuando se desconocen los otros dos lados, pero se conoce un ángulo.

- ¿Cuál es el cociente que define la función seno?
- ¿Y las funciones coseno y tangente?

PARA COMENZAR

En la tabla siguiente se han calculado el seno, el coseno y la tangente de diferentes ángulos. Utiliza tu calculadora para completarla y después contesta las preguntas.

Ángulo	30°	45°	60°	75°	120°	150°	180°	210°	240°	300°
Seno			$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$				$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
Coseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$					$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1		$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente			$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$

a. ¿Cuánto mide el ángulo cuyo valor de seno es 1?
b. ¿En qué casos el valor de seno, coseno y tangente es cero?
c. ¿Cuánto miden los ángulos cuando el valor de seno y coseno es $\frac{1}{2}$?
d. ¿Cuánto miden los ángulos cuando el valor de seno y coseno es $\frac{\sqrt{3}}{2}$?
e. ¿Cuál es la medida de los ángulos cuyo valor de tangente es $\frac{\sqrt{3}}{3}$?
f. Y si el valor de la tangente es $\sqrt{3}$, ¿cuánto miden los ángulos?

Reúnete con un compañero y revisen sus resultados. Con el apoyo de su profesor, corrijan lo que sea necesario.

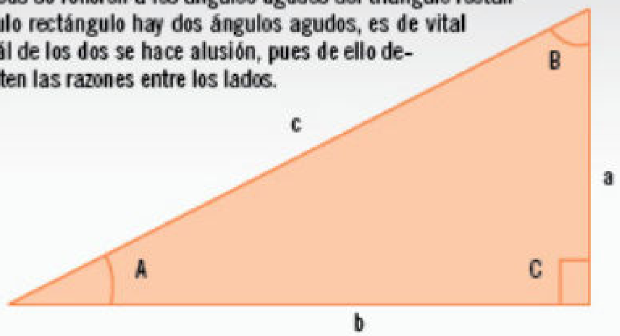
PARA SABER MÁS

Las funciones trigonométricas se refieren a los ángulos agudos del triángulo rectángulo. Como en todo triángulo rectángulo hay dos ángulos agudos, es de vital importancia clarificar a cuál de los dos se hace alusión, pues de ello dependerá la forma que adopten las razones entre los lados.

$\text{Sen } A = \frac{a}{c}$ $\quad \text{Cos } B = \frac{a}{c}$

$\text{Cos } A = \frac{b}{c}$ $\quad \text{Sen } B = \frac{b}{c}$

$\text{Tan } A = \frac{a}{b}$ $\quad \text{Tan } B = \frac{b}{a}$



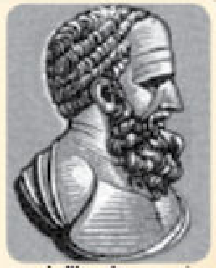
MATEMÁTICAS HISTÓRICAS

En el siglo II, Hiparco de Nicea (190 a.n.e.-120 a.n.e.) fue el primero en crear una tabla de razones trigonométricas, al considerar los triángulos inscritos en un círculo con un radio grande y fijo.

Aproximadamente, 300 años después, Claudio Ptolomeo (*ca.* 100-*ca.* 170) hizo algo similar con un círculo de radio igual a 60 unidades. Estas razones trigonométricas fueron básicas para los astrónomos durante muchos siglos.

En el *Almagesto*, Ptolomeo dio una explicación de un método para calcular los elementos desconocidos de un triángulo.

Fuente: *Historia y didáctica de la trigonometría*, de Francisco Luis Flores Gil.

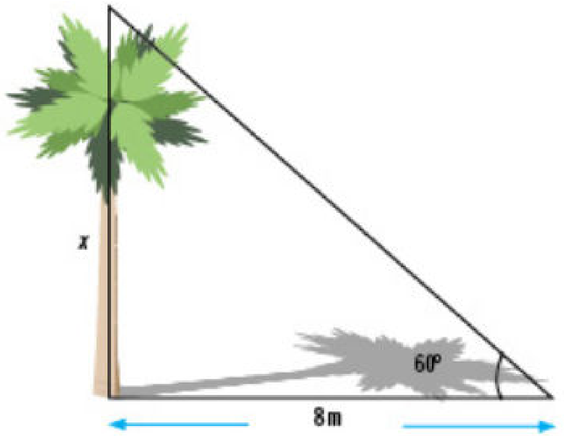


Hiparco de Nicea fue un matemático, astrónomo y geógrafo griego.

Seno y coseno: el ángulo de elevación

Martín necesita obtener la altura de una palmera, para ello, midió la sombra y un ángulo, obteniendo los valores que se muestran a continuación.

1. Con estos datos, responde las preguntas en tu cuaderno.
   a. ¿A cuáles elementos del triángulo hacen referencia la altura de la palmera y la longitud de la sombra?
   b. ¿Cuál es la razón trigonométrica que se puede utilizar para determinar la altura de la palmera?
   c. ¿Qué estrategia empleaste para decidir que ésta es la función trigonométrica adecuada para el problema?



2. Considerando la respuesta de la pregunta anterior, completa la expresión siguiente.

$$\square\,(60°) = \frac{x}{\square}$$

3. Despeja x de la ecuación que completaste y resuélvela.
   a. ¿Cuáles operaciones realizaste para resolver la ecuación?
   b. ¿Cuánto mide la altura de la palmera?

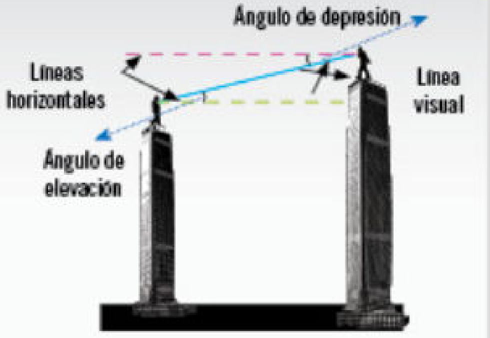
Reúnete con un compañero y revisen sus resultados. Si encuentran diferencias analicen a qué se debieron y, con el apoyo de su profesor, corrijan lo que sea necesario.

PARA SABER MÁS

Existen dos tipos de ángulos con respecto a la trigonometría, el ángulo de elevación y el ángulo de depresión. Estos ángulos se forman entre la línea visual y la línea horizontal.

El ángulo de elevación se forma cuando la línea visual está arriba de la horizontal, y el ángulo de depresión cuando la línea visual está debajo de la horizontal.

La medida de los ángulos se pueden representar con letras griegas como "θ" y "α", las cuales se leen como *teta* y *alfa* respectivamente.

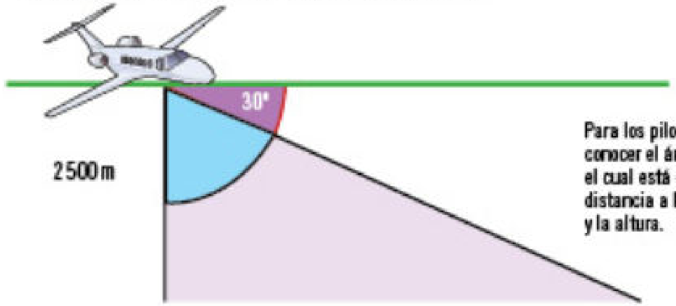


REFLEXIONA

Si los ángulos de elevación y depresión son alternos internos, ¿cómo son entre sí?

Tangente: el ángulo de depresión

Un avión está a 2500 m de altura y empieza a descender para aterrizar en el aeropuerto de la ciudad de México.



Para los pilotos es fundamental conocer el ángulo de descenso, el cual está en función de la distancia a la pista de aterrizaje y la altura.

TIC

Para que aprendas más sobre el uso de las razones trigonométricas, te invitamos a consultar los sitios siguientes: http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/geometria/trigonometria/pendiente_carretera/actividad.html y http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/geometria/trigonometria/tales_sombras/actividad.html
(consultados el 17 de marzo de 2016). Explóralos y contesta las preguntas que se plantean.

LECTURALIA

Te sugerimos el capítulo quinto de *Geometría Recreativa*, de Yakov Perelman en el sitio electrónico siguiente: http://www.librosmaravillosos.com/geometriarecreativa/capitulo05.html (consultado el 17 de marzo de 2016).

1. Con esta información, determina en tu cuaderno qué distancia recorre el avión hasta llegar a la pista.
   a. ¿Cuál es la razón trigonométrica que se puede usar para obtener la distancia que recorre el avión?
   b. Escribe una ecuación que nos permita resolver el problema.
   c. ¿Cuántos metros recorre el avión durante el descenso?
   d. Si el ángulo de depresión mide 30°, ¿cuánto mide el ángulo de descenso del avión, si ambos ángulos son complementarios?

2. Considera la medida del ángulo de descenso y empléala para resolver de nuevo este problema.
   a. ¿Obtuviste el mismo resultado?
   b. ¿Utilizaste la misma razón trigonométrica?

Revisen sus resultados en parejas. Si encuentran diferencias, analicen a qué se debieron y, con el apoyo de su profesor, corrijan lo que sea necesario.

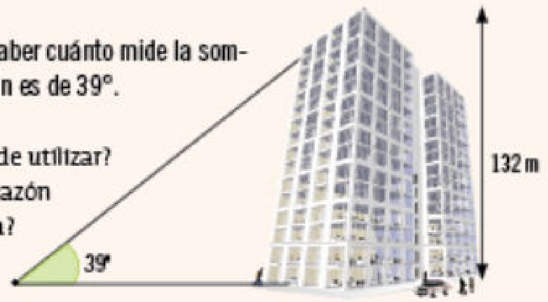
REFLEXIONA

¿Con cuál ángulo se puede resolver el problema anterior utilizando la misma razón trigonométrica?

PARA RESOLVER

Lee el planteamiento y responde.

La altura de la torre Remex mide 132 m y se quiere saber cuánto mide la sombra que proyecta el sol cuando el ángulo de elevación es de 39°.



a. ¿Cuál es la razón trigonométrica que se puede utilizar?
b. ¿Qué estrategia empleaste para definir la razón trigonométrica adecuada para el problema?
c. Plantea una ecuación que te permita obtener la medida de la sombra.
d. Describe el proceso de resolución de la ecuación en tu cuaderno.
e. ¿Cuánto mide la longitud de la sombra de la torre?

Reúnete con un compañero y comparen sus respuestas. En caso de encontrar diferencias, con el apoyo de su profesor, efectúen las correcciones que sean necesarias.

Reto

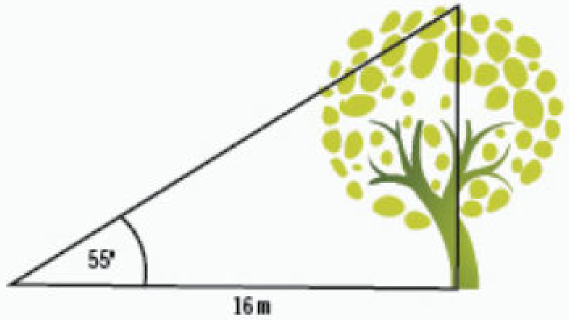
Con base en la información del ejercicio anterior, contesta.

Al considerar el ángulo de depresión, ¿cómo se puede obtener la sombra de la torre Remex utilizando la misma razón trigonométrica?

Tarea en casa

Después de una tormenta un árbol quedó desgajado y puede caer en cualquier momento. Sergio tramitó un permiso para talarlo y evitar un accidente posterior. Un amigo le aconsejó obtener la altura del árbol para determinar en qué sentido derribarlo, de este modo, cuando cayera, no dañaría algo que tuviera cerca. Al medir algunas distancias, Sergio hizo un esquema como el siguiente.

1. Partiendo de la información del esquema, contesta las preguntas.



a. ¿Cuánto mide la altura del árbol?
b. ¿Cómo se puede obtener la altura del árbol de otra forma?

AFORISMOS

"Las matemáticas son una ciencia exacta salvo cuando te equivocas."

Jaume Perich (1941-1995), escritor, dibujante y humorista catalán.

¿Consideras que la exactitud de las matemáticas depende de las personas que realizan los cálculos?, ¿por qué?

HISTORIA DE LAS PALABRAS

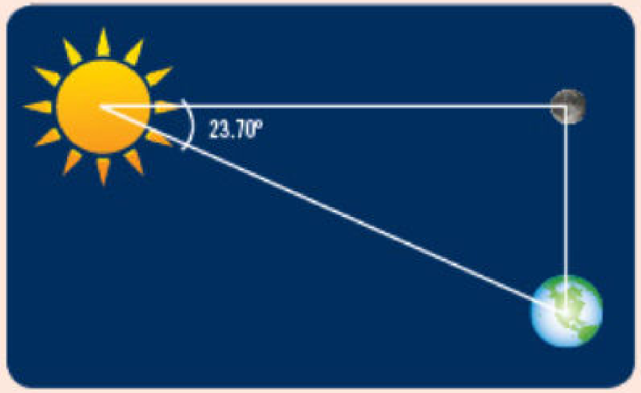
La palabra "trigonometría" proviene de tres palabras griegas: "*treis*" que significa tres; "*gonía*": ángulo, y "*métron*", "medida". Por tanto, etimológicamente, trigonometría significa "medida de tres ángulos".

PARA TERMINAR

Lee el planteamiento y resuelve.

Un astrónomo quiere obtener las distancias que hay entre los centros de la Tierra, del Sol y de la Luna, a partir del esquema.

Si la distancia media entre la Tierra y el Sol es de 149 600 000 km y los radios de la Tierra, el Sol y la Luna miden 6 370 km, 695 990 km y 1 740 km, respectivamente.



1. Responde lo que se pide.
   a. ¿Cuánto mide la distancia que hay entre el centro de la Tierra y el centro de la Luna?
   b. ¿Cuál es la distancia que hay entre los centros del Sol y de la Tierra?
   c. ¿Cuánto mide la distancia entre el centro del Sol y el centro de la Luna?

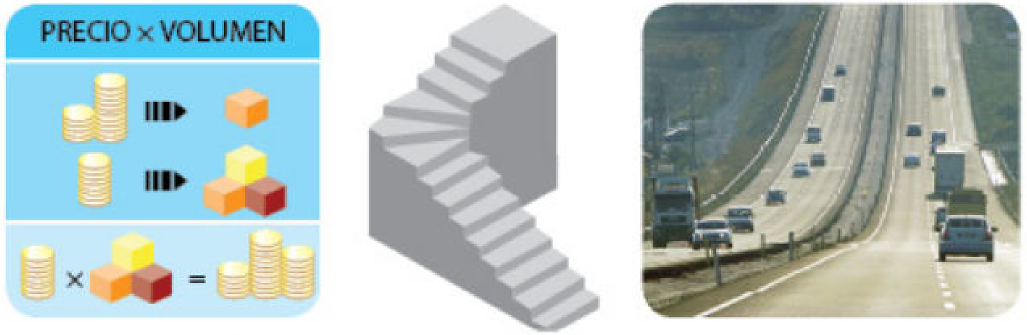
En parejas, revisen sus resultados. Si encuentran diferencias, analicen a qué se debieron y, con el apoyo de su profesor, corrijan lo que sea necesario.

LECCIÓN 6

CÁLCULO Y ANÁLISIS DE LA RAZÓN DE CAMBIO DE UN PROCESO O FENÓMENO QUE SE MODELA CON UNA FUNCIÓN LINEAL. IDENTIFICACIÓN DE LA RELACIÓN ENTRE DICHA RAZÓN Y LA INCLINACIÓN O PENDIENTE DE LA RECTA QUE LA REPRESENTA

Existen en la vida cotidiana gran número de actividades o procesos de variación constante que se pueden modelar por medio de funciones lineales, en las cuales la razón de cambio representa esa variación constante. Como ejemplos pensemos en el diseño de un eje vial, una escalera, el precio de venta de la gasolina o la distancia que recorre un automóvil por unidad de tiempo.

- ¿Qué relación observas entre los incrementos del valor de los boletos y la cantidad de personas que asistirán a un evento?
- ¿Qué relación existe entre la razón y la pendiente?
- ¿Qué tipo de gráfica representa a las funciones lineales?



Las funciones lineales se pueden presentar lo mismo en economía, arquitectura, que en el transporte.

PARA COMENZAR

Con la guía de tu profesor, forma un equipo de tres o cuatro integrantes con tus compañeros. Consigan el material que se indica a continuación y después desarrollen las actividades propuestas.

- Tabla de perfocel.
- Tornillo de 2 cm de longitud con dos tuercas, de diámetro ligeramente menor a las perforaciones de la tabla de perfocel.
- Dos listones de distintos colores, de 8 y 12 cm de longitud.
- Marcador de tinta indeleble.
- Tuerca grande o una pesa de 50 g.

Continúa...

Actividad 1

Modelen lo que sucede cuando se saca agua de una noria mediante un cordel.

La polea simple facilita el trabajo al cambiar la dirección de la fuerza aplicada. Es posible establecer una relación lineal entre el ascenso de la cubeta y la distancia horizontal recorrida.

1. Con las tuercas fijen el tornillo en el punto C de la tabla de perfocel, como se indica en la imagen.
2. Elijan el listón de longitud de 8 cm y anuden un extremo a la tuerca o pesa.
3. Corten lo que sea necesario para que el listón tenga una longitud igual a 8 perforaciones de la tabla de perfocel, pero dejen un pequeño tramo adicional de 1 cm para que puedan sujetarlo.
4. Ahora construyan el escenario mostrado en la imagen de la derecha.
   a. En lugar de la tuerca o la pesa, pueden colocar cualquier otro objeto que pese aproximadamente lo mismo.
   b. La unidad de medida será la distancia que existe entre cada uno de los orificios de la tabla de perfocel.
   c. La distancia del extremo del listón A hacia el punto C será x_i y la distancia que cuelga del punto C al punto B será y_i.

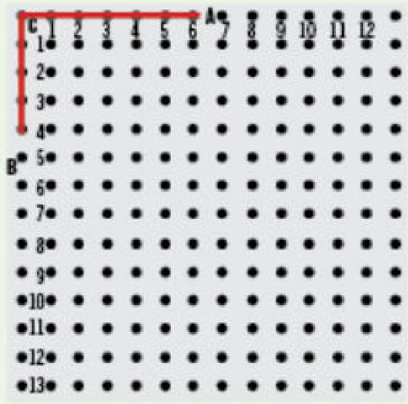


Tabla de perfocel.

5. Jalen horizontalmente el extremo A de la cuerda, de perforación en perforación, mientras otro compañero va registrando los valores en la tabla siguiente. Considera que la expresión x_{i-1} se refiere al valor anterior de x_i y que la expresión y_{i-1} se refiere al valor anterior de y_i.

i	x_i=AC	y_i=BC	x_i-x_{i-1}	y_i-y_{i-1}	$\frac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}$	m
1	0	8	---	---	---	---
2	1		1 − 0 = 1	7 − 8 = 1	$\frac{7-8}{1-0}$	
3	2	6		6 − 7 = −1		
4	3		3 − 2 = 1	5 − 6 = −1		−1
5	4					
6						
7			6 − 5 = 1		$\frac{2-3}{6-5}$	
8				1 − 2 = −1		−1
9	8	0	8 − 7 = 1			

Continúa...

Actividad 2

Cambien el listón por el de 12 cm para repetir la simulación. El punto C sigue determinado por el tornillo.

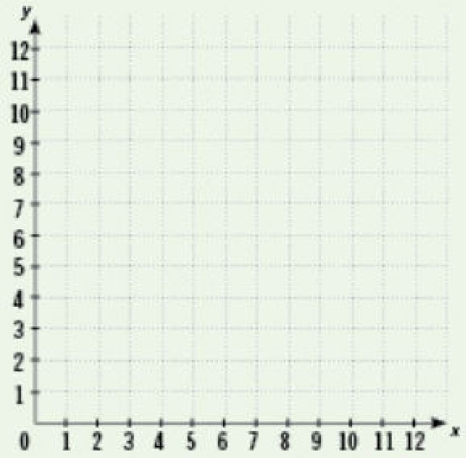
1. Anuden un extremo del listón de 12 cm a la tuerca o pesa.
2. Corten lo que sea necesario para que el listón tenga una longitud igual a 12 perforaciones de la tabla de perfocel, dejando nuevamente un pequeño tramo adicional de 1 cm para sujetarlo.
3. Ahora reconstruyan el escenario mostrado en la imagen con este listón. Una vez más, la unidad de medida será la distancia que existe entre cada uno de los orificios de la tabla de perfocel.
4. La distancia del extremo del listón A hacia el punto C será x_i y la distancia que cuelga del punto C al punto B será y_i.
5. Jalen horizontalmente el extremo A de la cuerda, de perforación en perforación, mientras otro compañero va registrando los valores en la tabla siguiente.

i	x_i=AC	y_i=BC	x_i-x_{i-1}	y_i-y_{i-1}	$\frac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}$	m
1	0	12	---	---	---	---
2	1		1 – 0 = 1	11 – 12 = –1		
3	2					
4	3	9				–1
5	4				$\frac{8-9}{4-3}$	
6		7		7 – 8 = –1		
7				6 – 7 = –1	$\frac{6-7}{6-5}$	
8	7	5		5 – 6 = –1		–1
9	8		8 – 7 = 1			
10		3		3 – 4 = –1		
11						
12	11		11 – 10 = 1			–1
13	12	0				

Actividad 3

Con los valores obtenidos en las tablas de las actividades 1 y 2, resuelvan los puntos siguientes.

1. Elaboren una gráfica con los valores de x_i = AC y y_i = BC que se corresponden (x_i en abscisa, y_i en ordenada), de color azul para los puntos obtenidos en la actividad 1 y de color rojo para los puntos obtenidos en la actividad 2.



Continúa...

2. Para las dos actividades planteadas antes (actividades 1 y 2), describan cómo cambian los puntos graficados al cambiar la longitud total de la cuerda.
   a. ¿Qué relación observan entre los incrementos del valor de x, es decir, $(x_i - x_{i-1})$, y los incrementos (o decrementos) del valor y, es decir, $(y_i - y_{i-1})$?
   b. ¿Cómo es la razón $\frac{(y_i - y_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})}$?
   c. Al hallar el resultado del cociente, ¿siempre define un mismo resultado?
   d. Al calcular la variación de los incrementos en las actividades 1 y 2, ¿qué resultado se obtiene?
   e. Si se construyera la gráfica, ¿qué se obtendría si la razón $\frac{(y_i - y_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})}$ es constante para cualquier par de puntos $(x_i - y_i)$, $(x_{i-1} - y_{i-1})$?
   f. ¿Cuál es la pendiente para cada una de las rectas en las actividades 1 y 2?
   g. Si cambias la longitud total de la cuerda, ¿cambia la razón que relaciona las longitudes x, y?
   h. ¿Cambia la pendiente?

TIC

Para que continúes aprendiendo más sobre razón y pendiente, referidos a las caras de las pirámides, acude al sitio electrónico siguiente y realiza lo que se te pide: https://www.geogebra.org/manual/es/Tutorial:Bloque_de_Pr%C3%A1cticas (consultado el 17 de octubre de 2016).

Comenten sus resultados con otros equipos. Si encuentran diferencias, determinen la causa y, con el apoyo de su profesor, efectúen las correcciones que sean necesarias.

Razón de cambio de un proceso que se modela con una función lineal: el costo de un servicio

Reúnete con un compañero y resuelvan el problema.

Óscar invitó a sus hermanos, Lulú y Emmanuel, al cine Ópera, donde el boleto de entrada por persona tiene un costo de $37.

1. ¿Cuánto pagó por las tres entradas?
2. Si además asistió la novia de Emmanuel, ¿cuánto pagó Óscar por todos?
3. Si Óscar y Lulú también llevaran un invitado cada uno, ¿qué cantidad en total tendría que pagar Óscar?
4. Con la información anterior, completen la tabla.

Personas	3		6	8	10	
Costo ($)		148				444

MATEMÁTICAS HISTÓRICAS

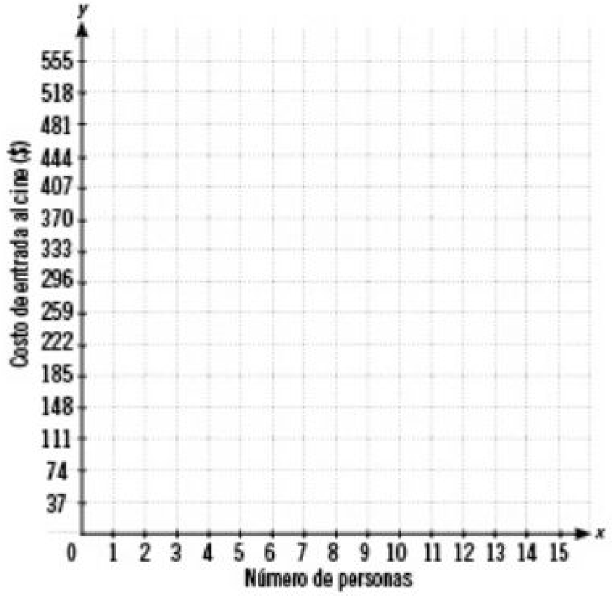
El hombre ha tenido la necesidad de entender los cambios percibidos en su entorno para utilizarlos en su favor y transformar el medio ambiente.

La historia de la razón de cambio comienza con los egipcios y los babilonios, hace más de 3 000 años. Ellos lograron establecer relaciones entre las variaciones de las diversas magnitudes que estudiaban para describir los cambios de su entorno en relación con el universo.

En cuanto a la construcción de las pirámides, el problema consistió en mantener "una pendiente uniforme en cada cara y la misma en cada una de las cuatro caras de la pirámide". Para resolverlo, se solía utilizar la relación "*seqt*", que significaba "la separación horizontal de una recta oblicua del eje vertical por unidad de variación en la altura".

Fuente: *Una propuesta para la enseñanza de la derivada como razón de cambio a estudiantes de grado undécimo*, de Robinson Alfonso Cardona Aguirre.

5. Con los datos obtenidos en la tabla anterior, tracen la gráfica correspondiente.
6. Analicen la gráfica y contesten las preguntas.
   a. ¿Cuánto se pagaría por 7 personas?
   b. ¿Cuánto se pagaría por 10 personas?
   c. Si se cuenta con $350, ¿cuál es el mayor número de personas que pueden ser invitadas?



7. Con los datos mostrados en la gráfica, completen la tabla.

i	x_i	y_i	$x_i - x_{i-1}$	$y_i - y_{i-1}$	$\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$	m
1	1	37		37 – 0 = 37		
2	2					
3	3	111	3 – 2 = 1			
4				148 – 111	$\frac{148 - 111}{4 - 3}$	37
5					$\frac{222 - 185}{6 - 5}$	
6			6 – 5 = 1			
7						
8						
9	9					
10		370		370 – 333		37

8. Considerando la información registrada en la tabla anterior, resuelvan los puntos siguientes.
   a. Describan la relación que observan entre los incrementos del valor de x, $x_i - x_{i-1}$ y los incrementos (o decrementos) del valor y, $y_i - y_{i-1}$.
   b. ¿Cuál es el valor de la razón $\frac{(y_i - y_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})}$?
   c. ¿Cuál es la pendiente en este caso?
   d. Si se construyera la gráfica, ¿qué se obtendría si la razón $\frac{(y_i - y_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})}$ es constante para cualquier par de puntos (x_i, y_i) y $(x_i - 1\ y_i - 1)$?

Con ayuda de su profesor, revisen sus resultados con otra pareja de compañeros. Si encuentran diferencias, analicen a qué se debieron y efectúen las correcciones necesarias.

Reto Analiza el texto y contesta las preguntas.

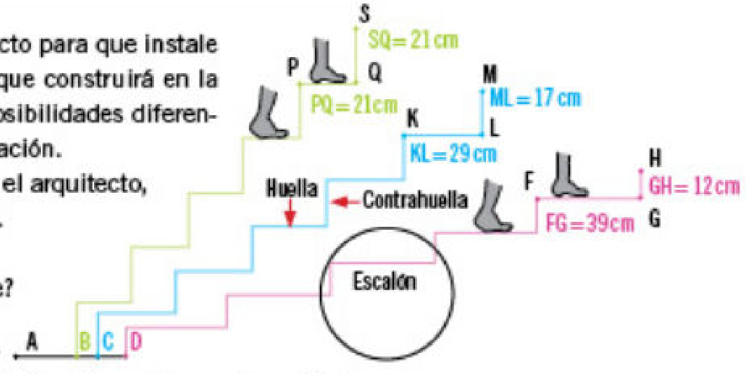
En un laboratorio escolar se hirvió agua. Cuando llegó al punto de ebullición se retiró el recipiente del fuego y se inició un registro cada 2 minutos de la disminución de la temperatura, hasta que alcanzó la temperatura ambiente. Los estudiantes registraron los valores medidos en la tabla siguiente.

Tiempo (min)	0	2	4	6	8	10	12
Temperatura (°C)	99.98	95.98	91.98	87.98	83.98	79.98	75.98

1. Con la información de la tabla, responde las preguntas.
   a. ¿A qué razón disminuye la temperatura del agua?
   b. ¿La razón es positiva o negativa?, ¿por qué?
   c. ¿Cuál sería la temperatura a los 18 minutos?
   d. ¿En qué minuto la temperatura del agua se encontraría a 51.98 °C?
   e. Construye la gráfica para los valores mostrados en la tabla.

Relación entre una razón y su pendiente

Ana María va a contratar a un arquitecto para que instale una escalera exterior para un cuarto que construirá en la azotea. El arquitecto le ofreció tres posibilidades diferentes, las cuales se muestran a continuación.



1. Con el esquema proporcionado por el arquitecto, responde las siguientes preguntas.
   a. ¿Cuál es el valor de la razón o inclinación en la escalera verde?
   b. ¿Cuál es el valor de la razón o inclinación en la escalera azul?
   c. ¿Cuál es el valor de la razón o inclinación en la escalera roja?
   d. ¿Cómo determinaste el valor de la razón para cada una de las escaleras?
   e. ¿Cuál es la pendiente para la escalera verde?
   f. ¿Cuál es la pendiente para la escalera de azul?
   g. ¿Cuál es la pendiente para la escalera roja?
   h. ¿Cuál es el color de la escalera que está más empinada? Justifica tu respuesta, incluyendo en ella la palabra "pendiente".
   i. ¿Cuál sería la pendiente para una escalera si sus escalones tuvieran una huella de 30 cm y una contrahuella de 20 cm?
   j. ¿Qué significa la pendiente en una escalera?

Reúnete con un compañero y comparte tus resultados. Junto con su profesor, analicen si sus respuestas son correctas. Si encuentran diferencias, analicen a qué se debieron y corrijan lo que sea necesario.

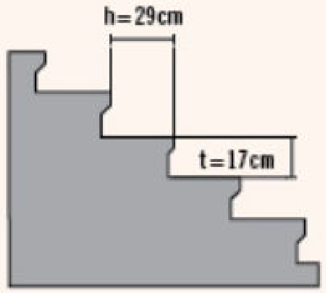
Reto Con base en la información anterior, contesta.

Dados los valores ideales de 28 cm y 18 cm para la huella y contrahuella, respectivamente, ¿cuál es entonces la pendiente de una escalera ideal?

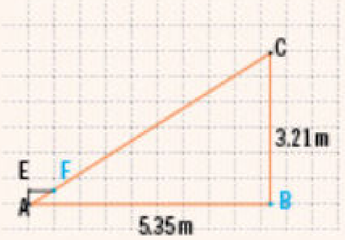
PARA RESOLVER

Desarrolla lo que se te indica.

1. Determina el valor de la razón para la escalera siguiente y su pendiente.



2. ¿Cuánto deben medir la huella y la contrahuella de cada uno de los escalones para poder colocar 10 escalones en la rampa mostrada?
   a. Determina la razón de cada uno de los escalones y compárala con la razón obtenida entre la altura y la base de la rampa, donde se colocarán los escalones.
   b. Con las medidas y los datos proporcionados, termina de construir los escalones de la escalera.



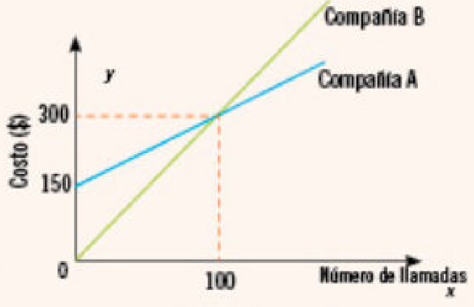
PARA SABER MÁS

Para colocar una escalera debes determinar la pendiente o ángulo de inclinación, además medir las huellas, que son la parte de la escalera donde se pisa, y las contrahuellas o peraltes, que corresponden a la altura de cada escalón. Ésta se determina por la distancia en altura entre 2 huellas. La ley de Bondel te permite establecer la relación entre las huellas y contrahuellas mediante la ecuación siguiente:

2 contrahuellas + 1 huella = 64 cm

Esta fórmula es la adecuada para ascender cómodamente por la escalera, donde una contrahuella equivale a 18 cm y una huella a 28 cm. Éstos son los cálculos apropiados para el diseño de una escalera.

3. Esta gráfica muestra el costo del servicio telefónico de dos compañías. Con base en la información que se proporciona, responde las preguntas.
   a. ¿Cuál es la razón de cambio (incremento en el costo por llamada) en cada compañía?
   b. ¿Cuál es la relación entre las razones de cambio y la pendiente o inclinación de las rectas?
   c. ¿Por qué el costo de las 100 primeras llamadas telefónicas es el mismo en las dos compañías?
   d. ¿Cuál es el incremento en el costo de 50 a 100 llamadas en la Compañía A?, ¿y en la B?
   e. ¿En la Compañía A, el incremento en el costo de una a 50 llamadas es el mismo que de 51 a 100 llamadas?, ¿y en la B?
   f. Si la razón de cambio en la compañía A fuera la misma que en la compañía B, ¿cómo serían las rectas que representan a ambos fenómenos?
   g. ¿Cómo serían sus pendientes? Reúnete con un compañero y, con la guía de su profesor, comparen sus resultados. Si encuentran diferencias, hagan las correcciones necesarias.



Costo del servicio telefónico

Reúnete con un compañero y, con la guía de su profesor, comparen sus resultados. Si encuentran diferencias, hagan las correcciones necesarias.

HISTORIA DE LAS PALABRAS

La palabra "pendiente" proviene del latín "*pendens, -entis*" y tiene varios significados:

- Como algo que está por resolverse.
- Estar sumamente atento o preocupado por algo que se espera o sucede: "Todos estaban pendientes de las palabras del orador".

Sin embargo, en el lenguaje técnico de las matemáticas, la palabra "pendiente" tiene otros significados; por ejemplo:

- Un terreno que está inclinado o tiene inclinación, permite que una pelota ruede por su pendiente.
- El ángulo que forma el terreno respecto a la horizontal: "La autopista tiene una pendiente muy suave". Inclinación que tiene una recta del plano con respecto al eje de las x.
- El cociente entre lo que aumenta o disminuye la ordenada, ante lo que aumenta la abscisa.
- La tangente del ángulo que forma una recta con el eje de las abscisas: si la recta tiene por ecuación $y = mx + b$, el número real m es la pendiente de la recta.

LECTURALIA

Te sugerimos leer el capítulo 1, "Velocidad, suma de movimientos", del libro *Física recreativa*, de Yakov Perelman. También lo puedes encontrar en el sitio: http://www.librosmaravillosos.com/fisicarecreativa1/capitulo01.html (consultado el 17 de marzo de 2016).

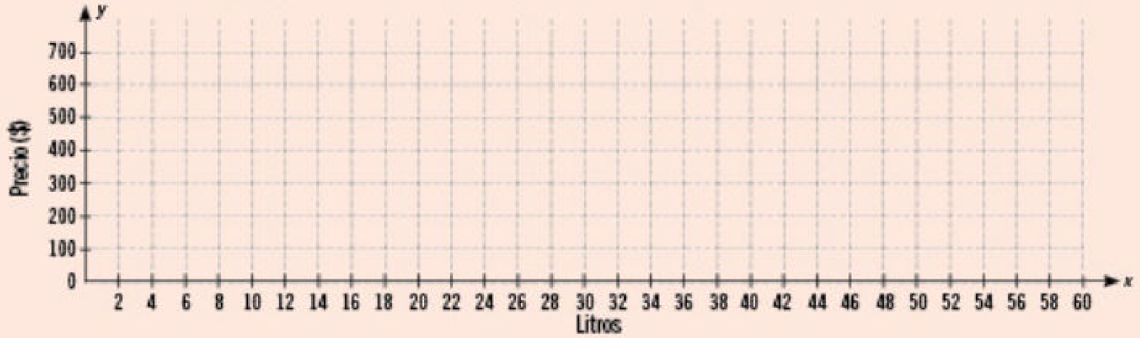
PARA TERMINAR

Analiza el planteamiento y resuelve.

Óscar está buscando una forma rápida de saber cuánto pagaría por cierto número de litros de gasolina para su auto nuevo. Si el precio por litro de gasolina es de $11.14, ¿puedes ayudar a Óscar a encontrar una respuesta? Para ayudarle, debes completar la tabla que se muestra a continuación. Después responde las preguntas que se plantean.

Litros de gasolina	1.0	2.0		4.0	5.0	6.0				10.0
Cantidad a pagar ($)	11.14	22.28	33.42		55.7		77.98			111.14

1. Al dividir la variación de la cantidad a pagar entre la variación del número de litros de gasolina, ¿qué significado se le puede asignar a dicho resultado?
2. Si a Óscar le interesara la respuesta como una expresión algebraica, ¿cómo se la puedes presentar?
3. Realiza un registro gráfico de la situación mostrada en la tabla.
   a. ¿Cuánto pagaría Óscar si llena su tanque con 60 l de gasolina?



Reúnete con un compañero y revisen sus resultados. Si encuentran diferencias, analicen a qué se debieron y, con el apoyo de su profesor, efectúen las correcciones necesarias.

MANEJO DE LA INFORMACIÓN

LECCIÓN 7

MEDICIÓN DE LA DISPERSIÓN DE UN CONJUNTO DE DATOS MEDIANTE EL PROMEDIO DE LAS DISTANCIAS DE CADA DATO A LA MEDIA (DESVIACIÓN MEDIA)

En ocasiones escuchamos en la televisión o leemos en los periódicos que el promedio de edad de un determinado grupo de personas es de más de 45 años, o bien, que la media de estudios en México es de 6.8 años, lo que corresponde aproximadamente al primero de secundaria. En otro tipo de información, el INEGI reportó en 2010 que el ingreso promedio trimestral en México era de $8,036.00 pesos mensuales.

- ¿Cómo saber qué tan confiable es esta información?
- ¿Qué es la media?
- ¿Cuándo o en qué circunstancias es la media un buen representante de una población de datos?

El Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI) es la dependencia de gobierno encargada de registrar y sistematizar toda la información referente a nuestro país, por citar dos ejemplos: la información económica y de población.

PARA COMENZAR

Con la guía de tu profesor, reúnete con un compañero para realizar la actividad siguiente.

Supongamos que se tienen los siguientes datos, tomados de una muestra sobre el ingreso mensual de los trabajadores de la construcción:

A={90000, 340, 1400, 5000, 800, 2200, 1800, 2300, 1500, 2500, 2700, 400}

B={900, 340, 1400, 5000, 800, 2200, 1800, 2300, 1500, 2500, 2700, 400}

1. Con estos datos efectúen los cálculos necesarios para resolver lo que se solicita.
   a. Calculen la media $\bar{x}_1$ de A.
   b. Calculen la media $\bar{x}_2$ de B.
   c. ¿Cuál de las medias, $\bar{x}_1$ o $\bar{x}_2$, representa mejor al conjunto de datos propuestos?, ¿por qué?

El valor absoluto de un número es lo que mide su longitud. Así $|4| = 4$, ya que su longitud es 4, y $|-3| = 3$, puesto que lo que mide -3, en la recta numérica real, es 3.

2. Considerando esta información respecto al valor absoluto de un número, efectúen los cálculos que se solicitan y respondan las preguntas.
   a. Mediante el valor absoluto, calculen la media de las distancias de cada dato de *A* a su media $\bar{x}_1$ como se indica a continuación.

$$D_1 = \frac{|9\,000 - \bar{x}_1| + |340 - \bar{x}_1| + \ldots}{\text{total de datos}}$$

Continúa...

   b. Utilizando el valor absoluto, calculen la distancia de cada dato de B a su media $\bar{x}_2$ y sumen el total, como se indica a continuación.

$$D_1 = \frac{|900 - \bar{x}_2| + |340 - \bar{x}_2| + \ldots}{\text{total de datos}}$$

   c. Si las diferencias de cada dato con su media no tuvieran valor absoluto, ¿cuál sería el promedio?

3. Comparen D_1 con D_2. Con esta nueva información replantéense y respondan las preguntas del punto 1.
   a. ¿Cuál de las medias, $\bar{x}_1$ o $\bar{x}_2$, representa mejor al conjunto de datos propuestos?, ¿por qué?

En grupo, con la guía de su profesor, revisen y discutan las respuestas a las preguntas del punto 3 y lleguen a una conclusión común.

PARA SABER MÁS

La desviación media Dm o desviación absoluta de un conjunto de datos $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n$, es una medida de qué tan dispersos están los datos con respecto a la media $\bar{x}$ y se calcula mediante

$$D_m = \frac{|d_m - \bar{x}| + |d_2 - \bar{x}| + |d_3 - \bar{x}| + \ldots + |d_n - \bar{x}|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |d_i - \bar{x}|}{n}$$

Si su valor difiere mucho de la media, significa que los datos están muy dispersos y puede ser que la media no sea un buen representante.

La desviación media

Los datos mostrados en la tabla corresponden a las calificaciones que obtuvieron los alumnos en español, en el grupo de 3° A y en el grupo 3° C.

Alumno	3° A	3° C
1	9.5	6.6
2	6.8	9.7
3	9.2	9.2
4	6.0	9.3
5	5.6	9.5
6	7.6	8.9
7	7.8	8.7
8	8.1	8.5
9	8.7	7.6
10	9.7	8.4
11	5.7	8.1
12	8.8	7.5
13	7.2	9.9
14	9.4	10.0
15	7.3	9.4
16	8.8	8.1
17	10.0	7.4
18	7.9	6.2
19	9.6	8.1
20	7.3	7.2

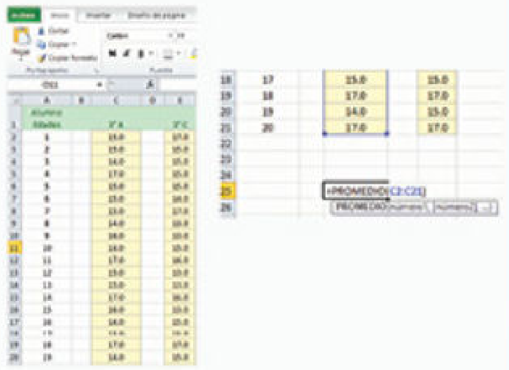
1. Con la información anterior, resuelve lo que se solicita.
   a. Calcula la media de cada grupo.
      - ¿Cuál de los dos grupos tuvo mejor desempeño en el curso?, ¿por qué?
   b. Calcula ahora la desviación media de cada grupo.
      - ¿Cuál de los dos grupos fue más consistente?, ¿por qué?

Con ayuda de tu profesor, reúnete con un compañero y comparen sus resultados. En caso de encontrar diferencias significativas, analicen a qué se debieron y efectúen las correcciones que sean necesarias.

TIC

Una forma sencilla de realizar los cálculos estadísticos, como la media, la desviación media y otros más, es utilizando una hoja de cálculo como Excel o bien Open Excel, este último de libre acceso en la red. A continuación se presenta una forma sencilla de realizar los cálculos aritméticos de las medidas estadísticas.

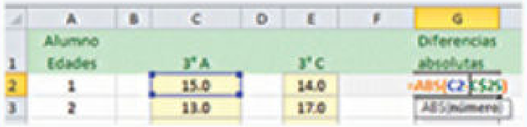
1. Imagina que se registró información sobre las edades de los alumnos de dos grupos de tercero. Deja la primera columna para enumerar los datos, pueden ser diez, veinte, cincuenta, o los que sean. Después inserta en las columnas los datos recabados en cada salón.



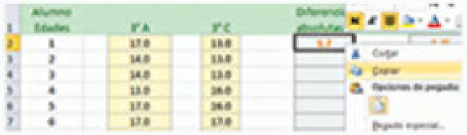
2. Una vez introducidos los datos, verifica en qué celda terminan, digamos C21. En la celda debajo de los mismos, escribe el signo = y enseguida la palabra **promedio**. Antes de que termines la captura, el programa te sugiere esta palabra, así que basta dar un clic sobre el menú emergente para validar esa función.

3. Después se solicita el rango de datos a los que les vas a calcular su promedio o media. Ahí debes escribir la celda desde donde inician los datos por ejemplo, la celda **C2**, después el signo ":" y enseguida la celda donde terminan, por ejemplo **C21**.

4. Al oprimir la tecla **Enter** verás de inmediato la media de los datos introducidos dentro del rango establecido. Se repite ahora la operación para la columna de datos siguiente.



5. Para calcular el valor absoluto de la diferencia elige una columna vecina del dato y escribe **= v ABS(C2−C$25)**. El escribir el símbolo de pesos en la celda **C$25**, indica a la hoja de cálculo que cuando se copie no modifique el valor de esa celda.



6. Una vez establecida la fórmula para la celda, puedes copiar esa fórmula para todas las celdas hacia abajo, notando que la copia es relativa a cada celda, es decir, en el renglón siguiente escribe **=ABS(C3−C$25)** y en el siguiente **=ABS(C4−C$25)** y así sucesivamente.

7. Para copiar coloca el cursor en la celda donde está la fórmula que se desea copiar. Oprime el botón derecho del ratón y aparecerá un menú contextual, donde una de las opciones es **Copiar**. Haz clic en ella y enseguida arrastra el ratón, sombreando en toda la parte de la columna en donde se desea copiar.

8. Al terminar de seleccionar la zona de copia, vuelve a oprimir el botón derecho del ratón y al aparecer el menú contextual elige **Pegar**, que es el icono que se indica con las flechas.

9. De inmediato, aparecen los números correspondientes a los valores absolutos de las diferencias del dato con la media.

10. Finalmente, para calcular la desviación media, vuelve a calcular la media o promedio de estas diferencias.

PARA SABER MÁS

La desviación estándar se denomina con la letra griega σ y es una extensión de la desviación media.

La desviación estándar es casi igual a la desviación media, sólo que en lugar de sumar los valores absolutos de las diferencias, se efectúa la suma de los cuadrados de las diferencias y la suma se divide entre el total de datos menos la unidad. Al resultado final se le extrae la raíz cuadrada.

La desviación estándar de un conjunto de datos $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n$ es una medida de qué tan dispersos están los datos con respecto a la media $\bar{x}$ y se calcula mediante la expresión:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(d_1-\bar{x})^2+(d_2-\bar{x})^2+(d_3-\bar{x})^2+\ldots+(d_n-\bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i-\bar{x})^2}{n-1}}$$

La desviación estándar es, sin duda, la medida de dispersión de datos más utilizada en la estadística descriptiva y, aunque es equivalente a la desviación media, es más sencilla de operar algebraicamente que empleando los valores absolutos de la desviación media.

HISTORIA DE LAS PALABRAS

Una de las ciencias que aplica la estadística es la meteorología, palabra que proviene del griego "*meteoron*", que significa "alto en el cielo" o "meteoro", y "*logos*", que significa "conocimiento" o "tratado". La meteorología es una ciencia formada a su vez de varias ciencias y es una rama de la física de la atmósfera, que estudia el estado del tiempo, el medio atmosférico, los fenómenos allí producidos y las leyes que los rigen.

PARA RESOLVER

Reúnete con un compañero, lean el planteamiento y resuelvan.

Para un proyecto escolar se construyó una pequeña catapulta que lanzaba pelotas de esponja. Tras realizar 12 tiros y medir el alcance de la pelota, se obtuvo la información siguiente.

Tiro	Alcance (m)
1	6.45
2	6.42
3	6.38
4	6.66
5	7.01
6	6.52
7	6.54
8	6.40
9	6.82
10	6.45
11	7.05
12	6.65

1. Calculen la media de los datos.
2. Calculen la desviación media.
   a. ¿Cuál es la diferencia entre las dos medias? ¿Qué representa cada una?

Reúnanse con una pareja de compañeros y, con la guía de su profesor, comparen sus resultados. Presenten sus argumentos para la respuesta dada a la tercera pregunta.

Tarea en casa

Con ayuda de tu profesor, reúnanse en grupos de tres compañeros y realicen la investigación siguiente.

1. Pregunten a todos los compañeros de un grupo de tercero lo que gastan a la semana en transporte para llegar a la escuela.
2. Organicen los datos y obtengan su media y su desviación media. ¿A qué conclusiones llegaron acerca del gasto de transporte por semana de un estudiante de su secundaria?

PARA TERMINAR

Con ayuda de tu profesor, reúnete con dos compañeros más para formar un equipo de investigación de campo.

1. Elijan alguno de estos temas para realizar la investigación.
   - Edad.
   - Consumo de fotocopias.
   - Consumo de refrescos.
   - Consumo de cigarros.
2. Una vez seleccionado el tema, realicen su investigación de acuerdo con los pasos siguientes. Tomemos por ejemplo el tema "Edad".
   a. Elijan al menos dos grupos de secundaria en su escuela y anoten la edad de cada alumno, el nombre no importa.
   b. Reúnan todos los datos en una sola lista para calcular la media de los dos grupos, como si fuera uno solo.
   c. Calculen la desviación media de los datos.
3. Presenten en el grupo sus resultados y expongan sus conclusiones.
4. Con ayuda de su profesor, en grupo, discutan en torno de las preguntas siguientes.
   a. ¿Serán los resultados válidos para toda la escuela?, ¿por qué?
   b. ¿Serán válidos para todo un estado?, ¿por qué?

Procuren llegar a un consenso grupal que unifique las conclusiones de los diferentes equipos.

LECTURALIA

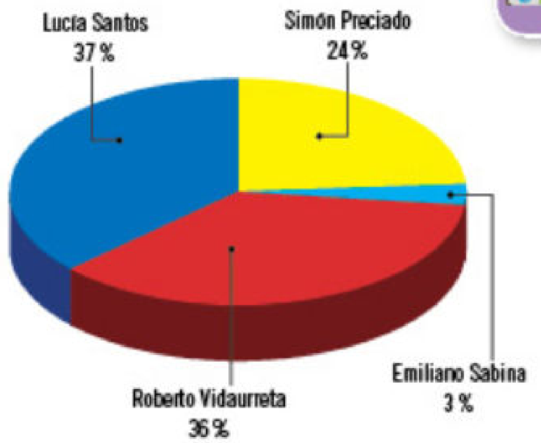
En el libro *La Estadística. Una guía de lo desconocido*, de Judith Tanur, cada capítulo abarca temas distintos en los cuales se aplica la estadística por ejemplo, muestra cómo en los campos de la medicina y la biología, se logra la aprobación de la vacuna de Salk contra la poliomielitis, después de un vasto ensayo con un grupo experimental y uno de control. También muestra cómo la estadística ayuda a detener la caza de ballenas, después de un estudio y seguimiento estadístico de la población de estos cetáceos y su pesca.

LECCIÓN 8

ANÁLISIS DE LAS DIFERENCIAS DE LA "DESVIACIÓN MEDIA" CON EL "RANGO" COMO MEDIDAS DE LA DISPERSIÓN

La estadística es muy empleada en nuestra sociedad; por ejemplo, se tienen estadísticas sobre el ingreso promedio de la población, sobre el grado de estudios, sobre adicciones y sobre enfermedades, como la diabetes y el cáncer. Incluso en las elecciones de todos los países, se tienen estadísticas de la intención de voto de la población. También se utilizan en los deportes para determinar el promedio de victorias sobre ciertos equipos o, por ejemplo, el promedio de bateo en beisbol o de goleo en futbol. Otra estadística usual es la de criminalidad. Todo esto lleva a concluir que se tienen estadísticas para casi todos los fenómenos naturales y sociales.

- ¿Cómo se elabora una estadística?
- ¿Cómo se obtiene la media de una población?
- ¿Para qué sirve la desviación media?



Durante un proceso electoral, los candidatos abordaron en un debate el tema de la educación. Una encuesta entre una muestra de votantes reveló el porcentaje de aceptación hacia la respuesta de cada candidato.

PARA COMENZAR

Con ayuda de tu profesor, reúnete con un compañero para desarrollar la actividad.

Supongamos que se tienen los datos siguientes, tomados de una muestra sobre la calificación en matemáticas de dos grupos de una preparatoria.

$G_1 = \{9.0, 3.4, 7.5, 5.7, 8.0, 9.4, 2.0, 10, 6.5, 1.5, 7.8, 4.5\}$

$G_2 = \{9.3, 5.0, 8.9, 4.6, 8.9, 10, 6.8, 8.8, 10, 7.5, 3.7, 5.4\}$

1. Con estos datos efectúen los cálculos que se solicitan y respondan las preguntas.
   a. Calculen la media $\bar{x}_1$ de G_1.
   b. Calculen la media $\bar{x}_2$ de G_2.
      - ¿Cuál de las medias, $\bar{x}_1$ o $\bar{x}_2$, representa mejor al conjunto de datos propuestos?
      - ¿Cuál grupo tuvo mejor desempeño escolar?

   c. Calculen la desviación media D_{m1} de G_1.
   d. Calculen la desviación media D_{m2} de G_2.
      - ¿Cuál grupo fue más consistente?, ¿por qué?

Continúa...

2. Ordenen de menor a mayor los datos de los grupos G_1 y G_2, en forma separada. Sabiendo que el rango es la diferencia o resta entre el mayor dato y el menor dato en cada grupo.
   a. Establezcan el rango R_1 de G_1.
   b. Establezcan el rango R_2 de G_2.
   c. ¿Cuál de los dos grupos tiene sus datos más dispersos respecto a la media?
   d. Comparando la desviación media con el rango, ¿cuál les parecería mejor medida de dispersión?

Con la guía de su profesor, discutan sus conclusiones con otras parejas y después obtengan una conclusión grupal.

Rango y desviación media

AFORISMOS

"Aquel que realiza operaciones sin preguntarse el porqué de las mismas es como un ciego que camina en una calle desconocida."

Carlos A. Cuevas (1947-), investigador y profesor.

¿Qué significa no saber lo que se hace, a pesar de realizar las tareas correctamente?

PARA SABER MÁS

En México, el 25 de enero de 1983, se creó el Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (INEGI) con el fin de levantar censos poblacionales, económicos y agropecuarios, así como estadísticas de ocupación, grado de estudios, educación, violencia intrafamiliar, entre muchos otros rubros.

Su sitio electrónico es http://www.inegi.org.mx/ (consultado el 17 de marzo de 2016), donde puedes consultar las estadísticas y datos que te interesen. El sitio cuenta con una sección especial para niños, jóvenes e investigadores.

Los datos siguientes son los salarios mensuales (en $) de todos los empleados de una fábrica.
2950, 2546, 2377, 1758, 89534, 3579, 1584, 1770, 1865, 2042, 2697, 54789, 2816, 1854, 2149, 2417, 2550, 1937, 2495, 15587, 2823, 1621, 28800, 2062.

Estos datos incluyen al director general, al gerente, al subgerente y al capataz.

Los obreros solicitan un aumento de salario, pero el director general no lo acepta, argumentando que el salario promedio de la compañía es de $9775.08, lo cual está muy por encima del salario mínimo, que en ese momento es de $1841.40.

1. Sin efectuar ningún tipo de cálculos, responde la pregunta.
   a. ¿Crees que es correcta la afirmación del director?, ¿por qué?

2. Para determinar la veracidad de tus repuestas, considera la desviación media de los datos, para ello, sigue el procedimiento indicado a continuación.
   a. Calcula la media de los salarios mensuales de todos los empleados de la compañía.
   b. Calcula ahora la desviación media.
   c. ¿Crees que es correcta la afirmación del director?

3. Por último, considera el rango para replantear la pregunta original, de acuerdo con el procedimiento indicado a continuación.
   a. Ordena los datos y establece el rango mediante la diferencia o resta entre el mayor salario y el menor salario.
   b. Con esta nueva información, ¿consideras que es correcta la afirmación del director?
   c. Comparando la desviación media con el rango, ¿cuál te parecería mejor argumento para disentir del director?

Comparte tus respuestas con otro compañero. En caso de no coincidir en sus cálculos, con ayuda de su profesor, revisen a qué se debió esto y efectúen las correcciones necesarias.

Reto

Analiza la información y realiza lo que se indica.

Cuando se preparan los datos de una población en cuatro partes porcentualmente iguales, a cada parte se le llama cuartil. Para calcular los cuartiles se utiliza la mediana. Como la mediana separa los datos en dos partes iguales, proporciona el valor del segundo cuartil. Si después se calcula ésta de la primera parte, este valor se obtiene el primer cuartil. De manera análoga, el valor de la mediana para la segunda parte de datos será el tercer cuartil.

1. Con esta información calcula los cuartiles del grupo G_1 de la actividad "Para comenzar".
2. Calcula la diferencia entre el tercer cuartil y el primero. El valor que obtendrás se conoce como rango intercuartílico.

TIC

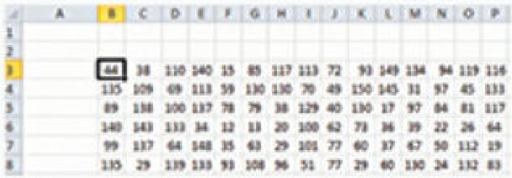
Casi todas las tareas de estadística resultan sencillas de realizar si se utiliza una hoja de cálculo como Open Excel o Excel, pues la hoja de cálculo contiene todas las funciones estadísticas.

En el caso de las medidas de tendencia central, están presentes la media, que se evoca **=PROMEDIO(rango)**; la mediana, que se evoca **=MEDIANA(rango)**; la moda, que se evoca **=MODA(rango)**.

Respecto a las medidas de dispersión, para calcular el rango existen dos tipos de funciones que resultan útiles, una función que aporta el mínimo valor de un conjunto de datos, que se evoca **=MIN(rango)**, y una segunda función que proporciona el máximo valor de un rango de valores, que se evoca **=MAX(rango)**.

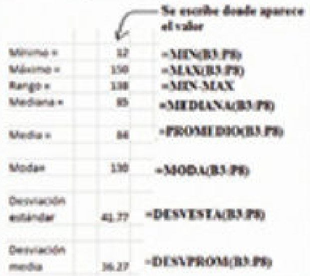
Para calcular las funciones antes descritas empleando Excel, se realiza el procedimiento.

1. Imagina que se registró información sobre las edades de los alumnos de dos grupos de tercero. Deja la primera columna para enumerar los datos, pueden ser diez, veinte, cincuenta o los que sean. Después inserta en las columnas los datos recabados en cada salón.



Nota que los valores inician en la celda B3 y finalizan en la celda P8.

2. Ahora, en cualquiera de las celdas vacías se pueden calcular las diversas medidas de tendencia central o las funciones que se requieran.



PARA RESOLVER

Lee el problema y realiza lo que se pide.

La tabla muestra las calificaciones de los alumnos de dos grupos de tercero de secundaria.

1. Considerando esos datos, calcula lo que se solicita.
   a. Calcula la media de cada grupo.
      - ¿Cuál de los dos grupos tuvo mejor desempeño en el curso?, ¿por qué?
   b. Calcula la desviación media de cada grupo.
      - ¿Cuál de los dos grupos fue más consistente?, ¿por qué?
   c. Ordena cada conjunto de datos del menor al mayor valor y calcula el rango.
      - ¿Cuál de los dos grupos tuvo mejor desempeño en el curso?, ¿por qué?

Con la guía de tu profesor, analiza tus resultados y compara tus resultados con los de tus compañeros.

	Grupo 3o. A	Grupo 3o. B
Alumno	Calificación	Calificación
1	10	9
2	6	10
3	6	5
4	10	6
5	9	9
6	10	8
7	2	6
8	10	5
9	5	6
10	7	8
11	7	8
12	0	8
13	9	10
14	0	6
15	1	6
16	4	6
17	0	5
18	5	8
19	7	6
20	6	6
21	1	6
22	6	7
23	8	6
24	10	7
25	2	7
26	4	8
27	8	6
28	7	6
29	5	6
30	1	10

PARA TERMINAR

Esta lista es el promedio de fotocopias que cada alumno saca al mes en un grupo de secundaria. Ordena la lista de menor a mayor y después efectúa los cálculos solicitados para resolver.

1. Calcula la media de estos valores.

150	55	112	53	73	27	74	25	57	125	74	38	52	28	141
73	109	148	67	63	45	144	55	106	42	110	129	142	51	105
21	11	29	19	99	143	90	88	99	63	40	23	109	13	76
78	35	146	114	32	24	46	119	84	66	106	93	103	63	136
74	118	119	78	87	105	50	132	109	28	84	21	71	141	102
49	142	134	26	78	115	88	107	40	126	139	20	138	62	18

2. Calcula el rango.
3. Con este valor de rango, ¿será válida la media como promedio?

Reúnete con un compañero y discutan su resultado. Determinen si es posible que lleguen a una misma conclusión. En caso de ser necesario, consulten a su profesor.

Autoevaluación

Lee en la primera columna los aspectos que vas a evaluar y marca con una equis (✗) el resultado que obtuviste de acuerdo con tu opinión. Sigue el mismo procedimiento que en los bloques anteriores.

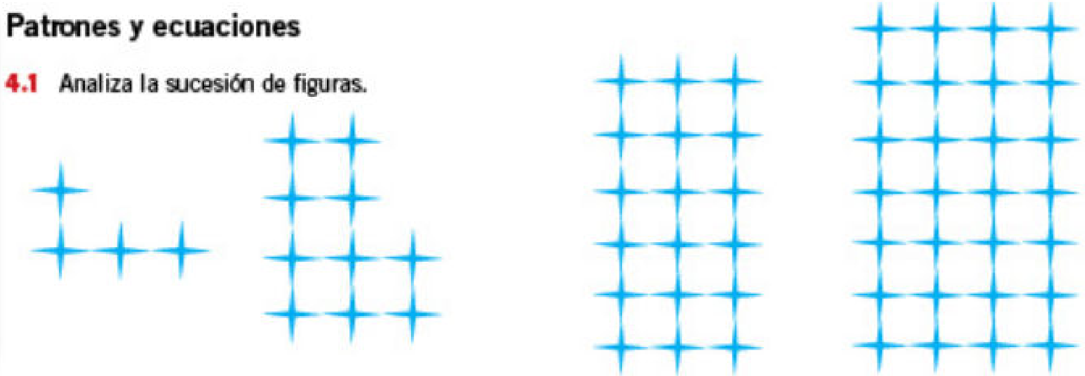
		Según mi opinión			Según la opinión de mis compañeros			Recomendaciones de mi profesor
		Sí	Aún tengo dudas	No	Sí	Aún tiene dudas	No	
Conocimientos y habilidades	Puedo utilizar en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión.							
	Puedo resolver problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.							
	Puedo calcular y explicar el significado del rango y la desviación media.							

Evaluación

Lee y contesta las preguntas como se indica en cada caso.

Patrones y ecuaciones

4.1 Analiza la sucesión de figuras.



PREGUNTA 1 ¿Cuál es la expresión algebraica que sirve para obtener el número de estrellas que tendrá cualquier figura?

a. $a_n = 3n^2$
b. $a_n = n^2 - 3n$
c. $a_n = 4n^2$
d. $a_n = n^2 + 3n$

Evaluación

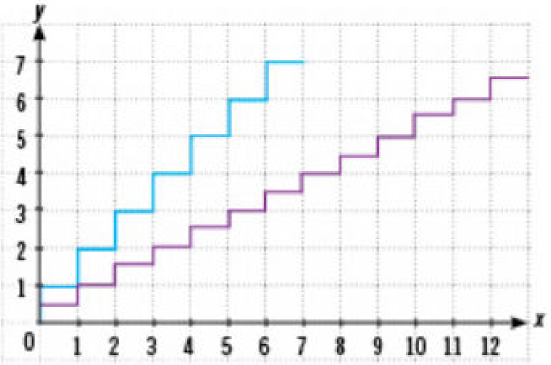
Figuras y cuerpos

4.2 Al girar algunas figuras planas se generan ciertos cuerpos.

PREGUNTA 2 ¿Cuáles sólidos se generan al girar un rectángulo, un triángulo rectángulo y un semicírculo?

Medida

4.3 Martín hizo un esquema de dos posibles construcciones de una escalera.



PREGUNTA 3 Si se trazara una recta que uniera los vértices entre la huella y el peralte de cada escalera, ¿cuál sería la pendiente de las rectas?

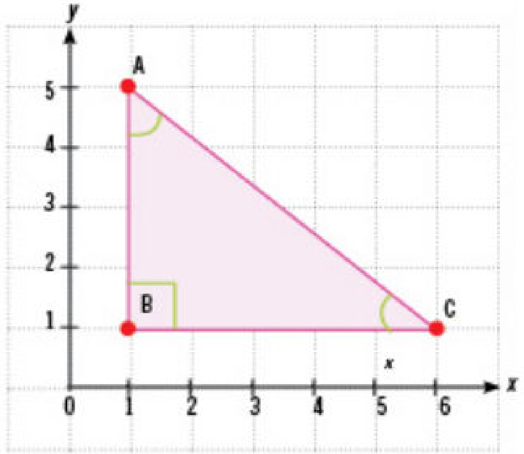
a. $m=\frac{7}{8}$ y $m=\frac{7}{15}$

b. $m=1$ y $m=\frac{1}{2}$

c. $m=0.875$ y $m=0.4$

d. $m=1$ y $m=2$

4.4 El profesor de Matemáticas le pidió a Martha que obtuviera el cociente entre los catetos del triángulo rectángulo siguiente para determinar la tangente de A y de B.

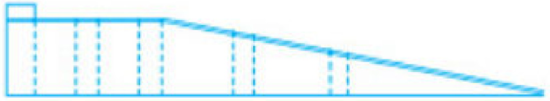


Ella hizo lo siguiente.

$\tan A=\frac{4}{5}$ $\tan B=\frac{5}{4}$

PREGUNTA 4 ¿Martha hizo lo correcto? Explica tu respuesta.

4.5 En un hospital se quiere poner una rampa para que las personas que van en sillas de ruedas puedan acceder a la entrada principal.



PREGUNTA 5 Si el ángulo de inclinación de la rampa mide 12° y se pueden recorrer 9m, ¿a qué altura está la entrada principal?

Proporcionalidad y funciones

4.6 Sergio está estudiando el cambio de tempera-

BLOQUE 5

Aprendizajes esperados

Al finalizar este bloque, serás capaz de lo siguiente.

- Resolver y plantear problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.
- Resolver problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipar cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.
- Leer y representar, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.
- Resolver problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

SEMANA	TEMA	SUBTEMA
EJE: SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO		
1	Patrones y ecuacioness	5.1 Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.
EJE: FORMA, ESPACIO Y MEDIDA		
2	Medida	5.2 Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un corte recto.
3		5.3 Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.
4		5.4 Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.
EJE: MANEJO DE LA INFORMACIÓN		
5	Proporcionalidad y funciones	5.5 Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la Física, la Biología, la Economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.
6	Nociones de probabilidad	5.6 Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.
EVALUACIÓN		

Los poliedros son figuras tridimensionales. Las formas básicas son el prisma, la pirámide, el cono y el cilindro. A partir de sus dimensiones lineales es posible calcular la superficie de sus caras laterales y su volumen. En la arquitectura, han predominado en las construcciones; de hecho, la gran mayoría de los edificios tienen forma de prismas cuadrangulares. ¿Qué poliedros puedes identificar en la imagen?, ¿puedes decir cómo calcular el volumen de un cono o de un cilindro?, ¿qué relación tienen con los prismas y pirámides? En la imagen, la Pirámide Transamérica en San Francisco, California, Estados Unidos de América.

LECCIÓN 1

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE IMPLICAN EL USO DE ECUACIONES LINEALES, CUADRÁTICAS O SISTEMAS DE ECUACIONES. FORMULACIÓN DE PROBLEMAS A PARTIR DE UNA ECUACIÓN DADA

El álgebra permite modelar matemáticamente un problema o situación de la vida real. De esta manera, la solución se obtiene mediante el planteamiento y resolución de ecuaciones, que pueden ser de primer grado, segundo grado, o bien, mediante sistemas de ecuaciones.

En algunos casos, la solución o soluciones de una ecuación o de un sistema de ecuaciones no resuelven de manera precisa el problema real, pero esto sucede porque a veces la realidad se complica; no obstante, su solución será válida para cualquier problema semejante al que da origen a la ecuación.

El álgebra permite resolver una gran cantidad de problemas a la vez, cuando son afines entre sí; por ejemplo, cuando se plantea que "para cualquier número multiplicado por sí mismo resulta el cuadrado del número", lo cual se puede comprobar sustituyendo cualquier número.

- ¿Cuál es la forma de una ecuación de segundo grado?
- ¿Cuál es la diferencia con una ecuación de primer grado?
- Si se tienen dos incógnitas, ¿cuántas ecuaciones se requieren para resolver un problema?
- ¿Qué es un sistema de ecuaciones?

PARA COMENZAR

Analiza el planteamiento siguiente y contesta las preguntas en tu cuaderno.

Juan Manuel es un estudiante de tercero de secundaria. En la materia de Matemáticas obtuvo 6.2 y 7.6 como calificaciones en sus dos primeros exámenes.

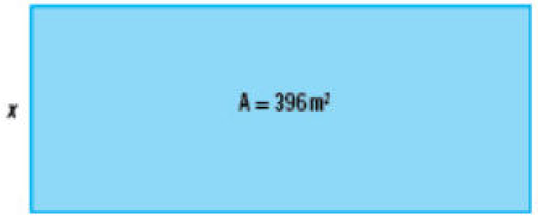
1. ¿Cuánto debe obtener en un tercer examen para lograr un promedio de 8?
2. ¿Cómo planteaste la ecuación para obtener la calificación que se requiere para alcanzar el promedio de 8?
3. ¿Cuál es el exponente de la variable x en la ecuación?
4. ¿La ecuación obtenida es de primer grado o de segundo?
5. ¿Conoces otra forma de resolver el problema? Descríbela en tu cuaderno.
6. Comparando la ecuación planteada para encontrar la solución y la otra forma que propusiste para resolver el problema, ¿cuál de las dos alternativas piensas que es más sencilla?, ¿por qué?

Reúnete con un compañero y comparen sus respuestas. Si encuentran diferencias, analicen a qué se debieron y consulten a su profesor para corregir lo que sea necesario.

Problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones

Reúnete con un compañero para desarrollar la actividad.

La superficie de un terreno rectangular mide 396 m² y se sabe que el lado más largo mide 4 m más que el otro lado.



1. Si la medida de un lado se representa con la letra x, ¿cuál es la mejor manera de simbolizar la medida del otro lado, considerando los datos del problema?
2. Utilizando las variables definidas para cada lado, ¿cómo se calcula el área del rectángulo?
3. Plantea la ecuación para obtener las dimensiones del terreno cuya superficie es igual a 396 m².
   a. ¿Cuál es el exponente de la variable x en la ecuación?
   b. ¿La ecuación obtenida es de primer o de segundo grado?
4. Si conocen otra forma de resolver el problema, descríbanla en su cuaderno.
5. Comparando la ecuación planteada para encontrar la solución y la otra forma que propusieron para resolver el problema, ¿cuál de las dos alternativas piensan que es más sencilla?, ¿por qué?
   a. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?

Con ayuda de su profesor, comenten sus respuestas con otra pareja. Si encuentran diferencias, analicen a qué se deben y corrijan lo que sea necesario.

El álgebra en las canchas deportivas

Reúnete con un compañero para desarrollar las actividades propuestas en tu cuaderno.

1. El largo de una cancha de futbol mide 30 m más que el ancho y su perímetro mide 240 m. Considerando esta información, resuelvan.

MATEMÁTICAS HISTÓRICAS

A lo largo de la historia el desarrollo del álgebra tuvo tres etapas: álgebra retórica, álgebra sincopada y álgebra simbólica.

En la primera etapa, los problemas se resolvían mediante palabras; por ejemplo, $2x + 2 = 4$ en su forma retórica era "dos veces la cosa más dos es igual a cuatro", o posiblemente "dos cosas más dos igual a cuatro". En la segunda etapa se introdujeron símbolos y se usaron junto con las palabras para resolver problemas. En la tercera etapa sólo se usaron símbolos.

Fuente: *Componentes de una historia de Al-Khwarizmi restaurada*, de Luis Puig.

PARA SABER MÁS

Las ecuaciones lineales se caracterizan por ser de grado uno y su gráfica siempre es una línea recta. Las ecuaciones cuadráticas son de grado dos y su gráfica es una parábola. Los sistemas de ecuaciones pueden ser lineales, cuadráticos, una combinación de ambos o, incluso, de un grado mayor a dos.

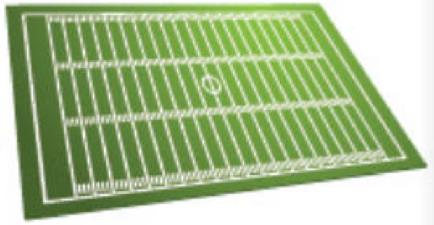
HISTORIA DE LAS PALABRAS

La palabra "problema" se compone del prefijo "*pro*" y del sufijo "*blema*", que significan "delante" y "lanzamiento", respectivamente; "*blema*" viene del verbo "*ballo*", el cual se refiere a "arrojar o lanzar con fuerza".

a. Planteen una ecuación que les permita obtener las dimensiones de la cancha y resuélvanla.
b. ¿Cuánto miden el largo y el ancho de la cancha?

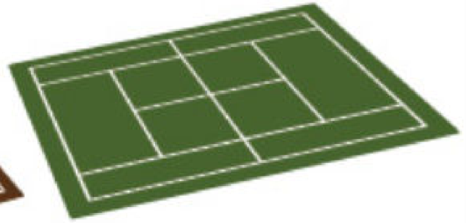
2. Con base en la información de las diferentes canchas de deportes que se muestran a continuación y tomando como referencia lo que se hizo en los incisos a y b, planteen diversos problemas y resuelvan las ecuaciones correspondientes.

Largo: 18 m
Perímetro: 54 m



Largo: 120 yd
Área: 6 360 yd^2

Área: 420 m^2
Ancho: 15 m



Ancho: 9 m
Perímetro: 54 m

AFORISMOS

"Las ecuaciones son para mí más importantes, porque la política es para el presente, pero una ecuación es algo para la eternidad."

Albert Einstein (1879-1955), físico alemán.

¿Por qué razón una ecuación puede ser algo de larga duración?

TIC

Para aprender más del tema te invitamos a visitar los sitios siguientes.

http://www.iespravia.com/rafa/rafa_javascript.htm, http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/algebra/ecuaciones/sistema_lineal/actividad.html, http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/algebra/ecuaciones/barcos/actividad.html y http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/algebra/ecuaciones/segundo_grado/actividad.html (consultados el 17 de marzo de 2016). Realiza las actividades, responde las preguntas propuestas y autoevalúate.

a. ¿Cómo son las ecuaciones para resolver los problemas que planteaste sobre las canchas, lineales o cuadráticas?, ¿por qué razón?

Con ayuda de su profesor, comenten sus respuestas con otra pareja. Si encuentran diferencias, analicen a qué se deben y corrijan lo que sea necesario.

REFLEXIONA

Si se toma como referencia la medida del ancho en cada caso, ¿los problemas y las ecuaciones se plantearían de la misma forma que si se toma como referencia la medida del largo? Argumenta tu respuesta.

Álgebra y finanzas

Un supermercado ha puesto diferentes productos en oferta y al pagar regresa el IVA en efectivo. Los precios originales de los productos se muestran en la imagen y en ellos está incluido el IVA.

Plantea y resuelve una ecuación en tu cuaderno para responder cada una de las preguntas.

1. Si la pantalla más grande tuvo un costo de \$5871.60, ¿cuánto fue el IVA aplicado, si descontaron el mismo del costo de la pantalla?
2. Si al comprar la pantalla más chica pagaste \$3861, ¿cuánto fue el IVA aplicado, si descontaron el mismo del costo de la pantalla?
3. Si el IVA es de 16 % y compras una consola de videojuegos, ¿cuánto dinero te descontarán del precio original?
4. ¿De qué tipo son las ecuaciones que obtuviste para resolver cada uno de los problemas anteriores?

El impuesto al valor agregado (IVA) es un impuesto al consumo y su tasa varía de acuerdo con las disposiciones legales. Este impuesto grava no solamente a los productos sino también a algunos servicios.

Con ayuda de tu profesor, reúnete con un compañero y revisen sus respuestas. Si encuentran diferencias, efectúen las correcciones que sean necesarias.

PARA RESOLVER

Resuelve lo que se indica.

Una tienda de tecnología puso las ofertas siguientes en su sitio electrónico para el Día de Reyes.

Producto	Precio (\$)	Precio con descuento (\$)
Videoconsola	5 990	4 490
Videojuego	1 740	400
Teatro en casa	2 890	2 390

1. Plantea una ecuación que te permita obtener el porcentaje de descuento en cada caso y resuélvela.

Con ayuda de tu profesor, analiza el procedimiento que seguiste en cada caso.

Reto

Plantea diferentes problemas, considerando cada una de las ecuaciones o sistemas de ecuaciones siguientes.

$x+x+1+x+2=21$	$5x+2=3x+6$	$0.86x+7.04=105.94$
$x(x+20)=300$	$x^2+5x+9=75$	$3x+5x=1792$ $4x+6x=2190$

LECTURALIA

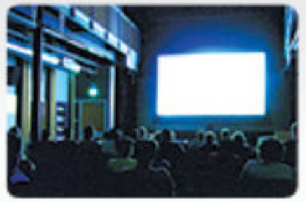
Te invitamos a resolver los problemas del capítulo 2, "El idioma del álgebra", y los primeros cuatro del capítulo 6, "Ecuaciones de segundo grado", del libro *Álgebra recreativa*, de Yakov Perelman. Los puedes encontrar en http://www.librosmaravillosos.com/algebrarecreativa (consultado el 17 de marzo de 2016).

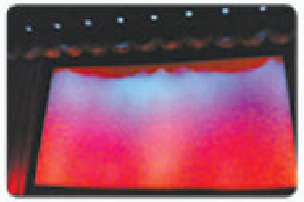
Tarea en casa

Para cada uno de los problemas siguientes resuelve en tu cuaderno lo que se solicita.

1. Considera los diferentes modelos de pantallas Imax, cuyas medidas se muestran en la tabla. Con esta información plantea diversos problemas empleando ecuaciones y resuélvelos.

Modelo	Ancho (m)	Largo (m)
A	16	28
B	20	28
C	21	29
D	22	16


Las medidas de las pantallas convencionales de cine se calculan en relación con el tamaño de la sala.


Una pantalla Imax se caracteriza por ser aproximadamente tres veces mayor que las pantallas convencionales de 35 mm, además de proyectar imágenes con mayor tamaño y definición.

2. Al preguntarle a Pitágoras por el número de sus alumnos, él contestó: "La mitad estudia matemáticas, la cuarta parte física, la séptima parte filosofía y tres estudian geometría". ¿Cuántos alumnos tenía Pitágoras?
3. Minerva y Maricela fueron a imprimir sus trabajos a un café internet. Minerva pagó \$64 por 12 hojas en blanco y negro, y 8 a color. Maricela pagó \$75 por 11 hojas a color y 10 hojas en blanco y negro. ¿Cuánto cuesta imprimir una hoja a color y cuánto una en blanco y negro?

PARA TERMINAR

Resuelve los problemas en tu cuaderno mediante el planteamiento de ecuaciones.

1. Martha y Graciela fueron de compras. Una de ellas compró dos pares de *jeans* para dama y dos pijamas. La otra compró tres pijamas y dos pares de *jeans* para caballero, . Si Martha pagó \$730 y Graciela \$925, ¿cuánto costó cada pijama y cuánto cada par de *jeans*?
2. Plantea tres diferentes problemas y resuélvelos mediante un sistema de ecuaciones, considerando el precio del chaleco para caballero, el pantalón para dama y caballero, y las playeras para caballero mostrados en la imagen.

Para determinar el precio de una prenda de vestir se considera el costo de los materiales, la mano de obra en la confección y el transporte al lugar de venta, entre otros factores.

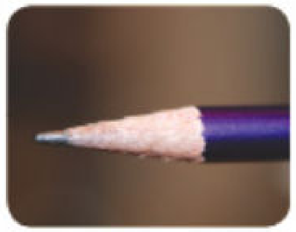
Reúnete con un compañero e intercambien los problemas que propusieron. Revisen cada planteamiento y respuesta. Si encuentran algún resultado incorrecto, analicen cuál fue la causa y efectúen las correcciones necesarias. En caso de duda, acudan a su profesor.

LECCIÓN 2

ANÁLISIS DE LAS SECCIONES QUE SE OBTIENEN AL REALIZAR CORTES A UN CILINDRO O A UN CONO RECTO. CÁLCULO DE LAS MEDIDAS DE LOS RADIOS DE LOS CÍRCULOS QUE SE OBTIENEN AL HACER CORTES PARALELOS EN UN CONO RECTO

Por lo general, estamos tan acostumbrados a los objetos que están a nuestro alrededor que no nos detenemos a pensar si presentan características comunes, por ejemplo, las pantallas de las lámparas de escritorio, las antenas de TV satelital, ciertos tambores africanos llamados *ashikos* y las puntas de los lápices de madera.

- ¿Qué tienen en común los objetos antes mencionados?
- ¿Cuáles son sus principales características?
- ¿Qué relación puedes establecer entre ellos?



Una antena parabólica pareciera no presentar semejanza con los demás objetos; sin embargo, todas estas formas tienen un origen común.

PARA COMENZAR

Lee el planteamiento y resuelve en tu cuaderno lo que se pide.

Arely, una decoradora de interiores, quiere diseñar un par de lámparas de buró, de tal forma que sean de un tamaño apropiado para los muebles con los que ya cuenta. Lan figura 1 es un boceto de la pantalla de la lámpara.

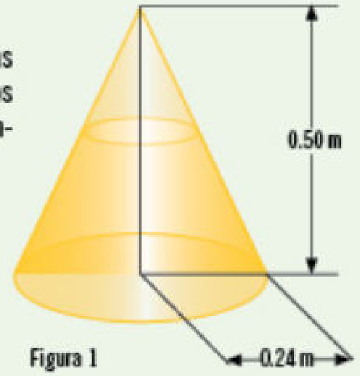


Figura 1

1. La figura 1 sirvió como modelo para establecer las dimensiones de la lámpara. Observa los datos y responde a las preguntas.
   a. ¿Cuánto mide su altura?
   b. ¿Cuánto mide su radio?
   c. ¿Cuál será la medida de su generatriz?

Continúa...

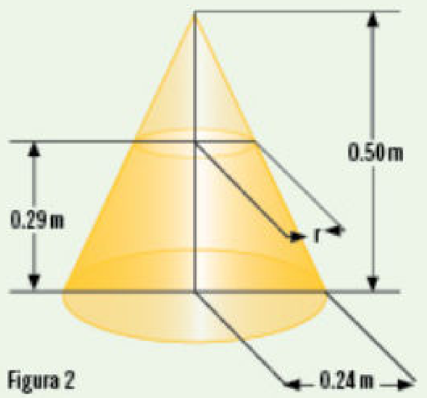


Figura 2

2. El primer paso consiste en construir una estructura de alambre. Para ello, Arely debe conocer todas las medidas necesarias antes de comenzar el trabajo manual. Si desea que la pantalla de la lámpara tenga una altura de 29 cm, como se ilustra en la figura 2, contesta lo siguiente:
   a. ¿Cuánto debe medir el radio r de la circunferencia menor?

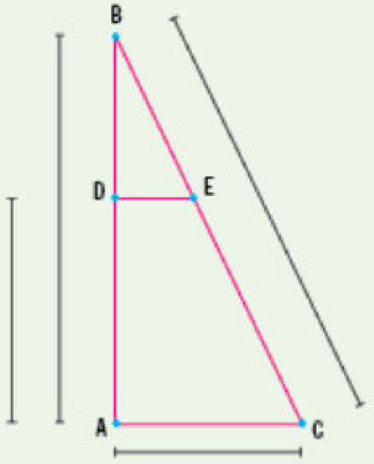


Figura 3

3. La figura 3 muestra un corte transversal de la pantalla de la lámpara. Anota en tu cuaderno las medidas de cada uno de los segmentos que componen la figura. Después, responde a las preguntas.
   a. ¿Qué tipo de triángulos son ABC y DBE?, ¿por qué?
   b. Establece y escribe una proporción entre los catetos de los triángulos ABC y DBE.

$$\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

   c. Con ayuda de la proporción anterior, calcula el valor del radio del círculo menor.
   d. ¿Cuánto mide el radio menor de la pantalla de la lámpara?

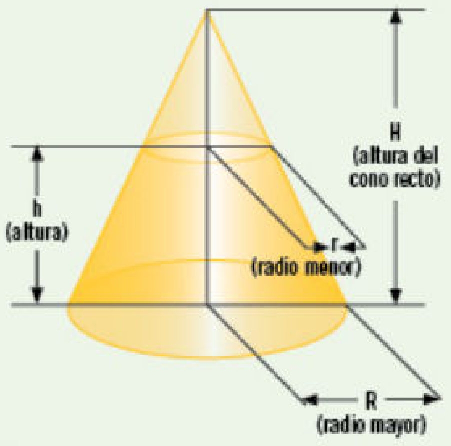


Figura 4

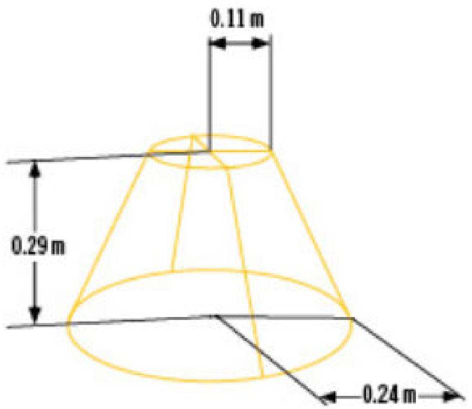
4. A la forma geométrica que tiene la pantalla de la lámpara de Arely se le conoce como cono recto truncado. Como se requieren pantallas de diversos tamaños, Arely quiere una fórmula general que le permita calcular los radios sin necesidad de repetir todo el proceso para cada nueva pantalla. Tomando como referencia el desarrollo de esta actividad y la figura 4, escribe en tu cuaderno una expresión matemática general que permita calcular el radio menor de un cono recto truncado a partir de las medidas de un cono recto.

Con ayuda de tu profesor, reúnete con un compañero y compartan sus resultados. Si existen diferencias, determinen la causa y efectúen las correcciones que sean necesarias.

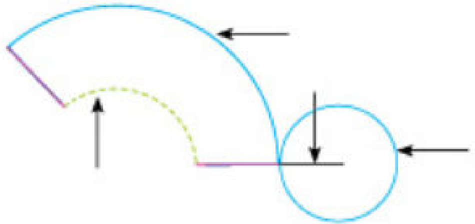
Cortes a un cono recto

Con la guía de tu profesor, reúnete con un compañero y desarrollen la actividad.

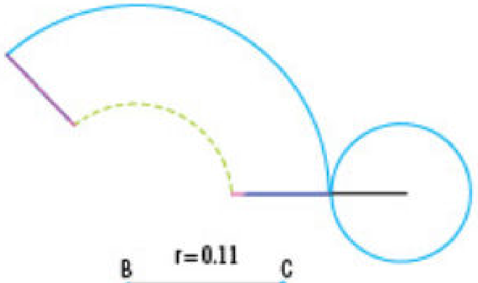
Arely ha construido el armazón de la pantalla de la lámpara y está lista para forrarla con una tela especial que debe comprar. Para estimar cuánta tela va a utilizar, Arely rodó el armazón sobre una cartulina mientras trazaba su contorno

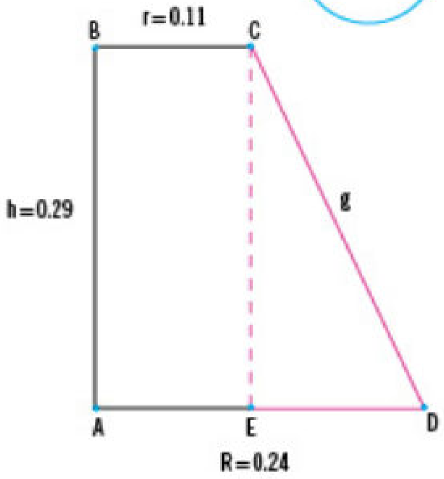


1. Copia en tu cuaderno el esquema 1. Analiza el esquema del armazón e identifica en el desarrollo plano las longitudes que se indican con una flecha. Anótalas y calcula aquellas que no estén dadas en el esquema del armazón de alambre.
2. En el esquema 2, ¿a qué segmento del desarrollo plano del cono truncado correspondería el segmento g (generatriz)?
3. Considerando la información suministrada y obtenida en los puntos 1 y 2, resuelve lo que se solicita a continuación.
   a. ¿Qué tipo de triángulo es EDC?
   b. ¿Cuánto mide $\overline{ED}$? Exprésalo en términos de r y R; después calcula su valor.
   c. Si $\overline{EC}=h$, ¿cuánto mide la generatriz g del cono truncado ?
   d. Escribe una expresión que permita calcular la generatriz de un cono truncado conociendo su altura y sus radios.



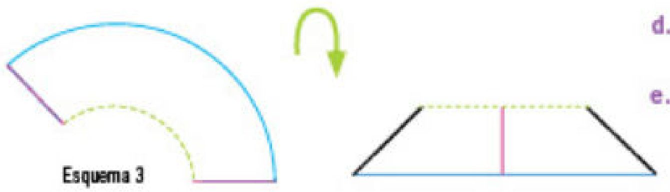
Esquema 1. Esquema del armazón de alambre para la lámpara y del desarrollo plano del armazón.





Esquema 2. Corte transversal del cono truncado que forma la pantalla de la lámpara.

4. La superficie lateral de un cono truncado es equivalente a la superficie de un trapecio, cuyas bases mayor y menor corresponden al radio mayor y menor, respectivamente, y cuya altura corresponde a la generatriz g del cono truncado. Esto se ilustra en el esquema 3 de la página 240. Con esta información, resuelve lo que se te solicita.
   a. ¿Cuánto miden la base mayor y menor del trapecio?
   b. ¿Cuánto mide la altura del trapecio?
   c. Determina el área del trapecio que es equivalente a la de la superficie lateral del cono truncado.



Esquema 3

d. ¿Cuántos centímetros cuadrados de tela se requieren para forrar la lámpara?

e. Escribe una expresión matemática que te permita calcular el área lateral de un cono truncado.

Comenten sus resultados con otra pareja. Si encuentran diferencias, analicen a qué se debieron y, con ayuda del profesor, corrijan lo que sea necesario.

TIC

Para conocer más sobre los conos truncados, sus medidas y desarrollos planos, visita el sitio siguiente. http://www.matematicasvisuales.com/html/geometria/planenets/cone.html (consultado el 17 de marzo de 2016).

Reto

Reflexiona y haz lo que se indica.
Deduce una expresión matemática que permita calcular el área total de un cono truncado.

Las secciones cónicas de Apolonio

Para realizar la actividad, consigue dos barras de plastilina o de masa para moldear del mismo color.

1. Toma la plastilina o masa para modelar y amásala para formar un cono, como se muestra a continuación.
2. Con ayuda de una tarjeta o de una espátula realiza un corte paralelo a la base del cono, como se muestra en la imagen de la derecha. Coloca el corte sobre tu cuaderno y delinea su contorno.

Corte paralelo a la base del cono.

3. Ahora, haz un corte oblicuo al cono (con una inclinación diferente a 90°), como se muestra en las imágenes. Coloca la "rebanada" sobre tu cuaderno y delinea su contorno.
4. Haz un corte perpendicular a la base del cono (con una inclinación de 90°), como se muestra en la imagen. Corta una "rebanada", colócala sobre tu cuaderno y delinea su contorno.

Corte oblicuo a la base del cono.

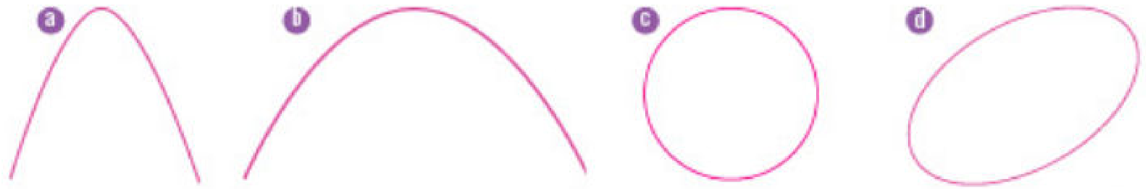
5. Realiza un corte oblicuo hacia la base del cono (con una inclinación diferente a 90°), como se muestra en la imagen de la página 241. Coloca la "rebanada" sobre tu cuaderno y delinea su contorno.

Corte perpendicular a la base del cono.

6. Analiza los trazos que realizaste en tu cuaderno al delinear las diferentes "rebanadas".
   a. ¿Cómo son las curvas que trazaste?
   b. ¿Encuentras alguna similitud?

Corte oblicuo dirigido hacia la base del cono.

7. Cada uno de los cortes que hiciste sobre el cono generó una curva en particular.



a: A esta curva se le concoe como hipérbola.

b: Con esta curva ya estás familiarizado, se trata de la parábola.

c: Esta curva debiste haberla reconocido inmediatamente, se trata de una circunferencia.

d: Esta curva, que asemeja una circunferencia achatada, recibe el nombre de elipse.

   a. Con la información del punto anterior, identifica en los trazos que realizaste en tu cuaderno cada una de estas curvas, escribe su nombre y determina qué tipo de corte en el cono recto las produce.

8. Repite los pasos anteriores para un cilindro hecho de masa para modelar o plastilina. Realiza varios cortes y determina las secciones cónicas que se pueden generar.

HISTORIA DE LAS PALABRAS

La palabra "curva" proviene del latín "*curvus*" que significa "curveado" o "doblado". En matemáticas se suele referir al trazo dejado por un punto móvil, el cual incluso puede formar una línea recta.

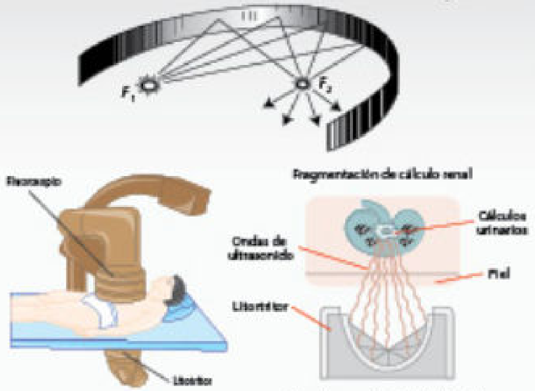
Reúnete con un compañero y compartan sus repuestas. Con la guía del profesor, verifiquen la precisión en sus trazos y lleguen a una conclusión común.

PARA SABER MÁS

En la elipse se localizan dos puntos llamados focos; en la parábola, solamente uno. Tanto la elipse como la parábola tienen propiedades de reflexión muy peculiares relacionadas con los focos. Cuando se coloca un emisor de ondas en uno de los focos de una elipse, por ejemplo, una bombilla o un emisor de ultrasonido, estas ondas se reflejarán en las paredes de la elipse y convergerán en el otro foco.

En medicina existe una aplicación muy importante de esta propiedad, consistente en el tratamiento para la destrucción de cálculos o piedras en los riñones empleando ultrasonido. Esto se hace con la ayuda de un aparato llamado litotritor o litotriptor, el cual precisamente tiene la forma de una elipse. En uno de sus focos (F1) se coloca el emisor de ultrasonido, mientras que el riñón del paciente se coloca en el otro foco (F2) de la elipse.

Litotritor o litotriptor.

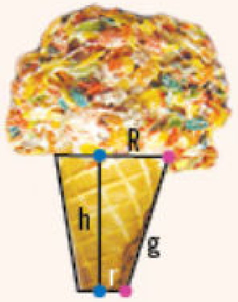


Funcionamiento del litotritor.

PARA RESOLVER

Lee el planteamiento y contesta en tu cuaderno lo que se pide.

Un fabricante de conos de helado quiere probar una nueva modalidad de conos, como se ilustra.



1. Encuentra la generatriz del cono truncado que corresponde a cada uno de los casos siguientes.
   a. Radio mayor, R = 10 cm; radio menor, r = 4 cm; altura, h = 10 cm
   b. Radio mayor, R = 9 cm; radio menor, r = 5 cm; altura, h = 5 cm
   c. Radio mayor, R = 8 cm; radio menor, r = 6 cm; altura, h = 6 cm

Tarea en casa

Analiza el problema y contesta las preguntas en tu cuadreno.

1. Una fábrica construye tinas de agua como la que se muestra.
   a. ¿Cuánto mide la superficie lateral de la tina?
   b. ¿Cuánto mide la superficie total de la tina, incluyendo la base?

PARA TERMINAR

Analiza el planteamiento y responde en tu cuaderno.

Un fabricante desea conocer la altura que debe tener una cubeta como la que se muestra en la figura. El fabricante establece que la lámina con la que se fabricará la cubeta debe tener una superficie de 10 137 cm².

1. Con esta información contesta las preguntas.
   a. ¿A qué figura geométrica corresponde la cubeta mostrada?
   b. ¿Qué datos son los que proporciona el problema?
   c. ¿Se pueden utilizar directamente las expresiones matemáticas desarrolladas en esta lección? Explica por qué sí o por qué no.
   d. ¿Cómo se calcula el área lateral de un cono truncado?
   e. ¿Cómo calculas los datos faltantes?
   f. ¿Cómo se debe modificar la expresión matemática para calcular la altura de la cubeta, de modo que cumpla las condiciones planteadas en el problema?

Reúnete con un compañero y compartan sus resultados. Si existen diferencias, determinen la causa y, con ayuda del profesor, efectúen las correcciones que sean necesarias.

LECCIÓN 3

CONSTRUCCIÓN DE LAS FÓRMULAS PARA CALCULAR EL VOLUMEN DE CILINDROS Y CONOS, TOMANDO COMO REFERENCIA LAS FÓRMULAS DE PRISMAS Y PIRÁMIDES

El mundo que nos rodea está formado por objetos sólidos o huecos que ocupan un espacio de tres dimensiones, como un tanque de gas, los pistones de un motor, el tinaco de la azotea, el cono de un helado, los conos en los estadios de fútbol para que los jugadores entrenen, los vasos cónicos con los que bebemos agua, entre otros.

Si lo reflexionas, estarás de acuerdo en que los objetos anteriores contienen varios elementos ya estudiados, por ejemplo, el radio, la circunferencia y la altura.

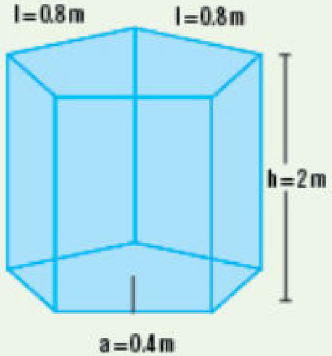
- ¿Sabes cuál es el nombre geométrico de las señalizaciones de tránsito?
- ¿Cuál es el nombre del cuerpo geométrico de los tinacos que almacenan agua en la azotea?
- ¿Qué relación existe entre el volumen de un cono recto y un cilindro circular recto?
- ¿Cuál de los dos tiene mayor volumen?

Los conos para señalamientos de tránsito y los tanques (cilindros) de gas corresponden a cuerpos geométricos.

PARA COMENZAR

Con la coordinación de tu profesor, reúnete con un compañero y desarrollen las actividades siguientes en el cuaderno.

En segundo año aprendieron que para calcular el volumen de un prisma se multiplica el área de la base por la altura. Analicen la imagen de la derecha e identifiquen las dimensiones que se señalan.



1. Si consideran que la figura mostrada es un recipiente para agua, en el cual el lado de la base mide 0.8 m, de altura mide 2 m y de apotema 0.4 m, respondan.
   a. ¿Cuál es el valor del área de la base?
   b. ¿Cuál es el volumen del recipiente en forma de prisma pentagonal?
   c. ¿Qué cantidad de agua le cabe en litros, si un centímetro cúbico equivale a un milésimo de litro, es decir, 1 m³ = 1000 l?

Continúa...

Tinaco cilíndrico.

2. Analicen la imagen de la izquierda e identifiquen las medidas del tinaco que se muestra. Si la base circular del tinaco tiene un radio de 0.55 m y su altura mide 1.16 m, responde.
   a. ¿Cuál es su volumen?
   b. ¿Cuántos litros de agua puede almacenar dicho tinaco, si 1 m^3 de agua equivale a 1 000 l de agua, es decir, 1 cm^3 = 0.001 l?

Con la guía de su profesor, comenten con otra pareja de compañeros la forma en que calcularon la capacidad del prisma pentagonal y del tinaco en forma cilíndrica. Si existen diferencias en sus resultados determinen cuál fue la causa y corrijan lo que sea necesario.

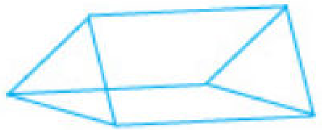
El volumen del prisma

PARA SABER MÁS

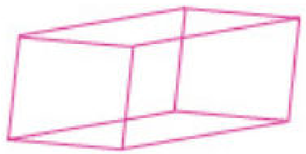
Recuerda que, mediante el teorema de Pitágoras, la apotema a y el radio r de un polígono regular de lado l se relacionan mediante la expresión: $a = \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}$

Con ayuda de tu profesor, reúnete con un compañero y desarrollen las actividades que se proponen.

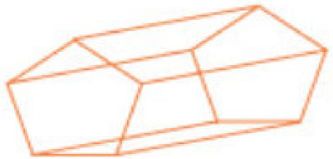
1. Con los datos proporcionados, calculen el volumen de los prismas regulares mostrados. Después resuelvan los planteamientos que se formulan.



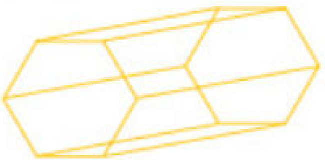
Prisma triangular
Lado de la base = 3.46 cm
Altura del prisma = 10 cm
Radio = 2 cm
Volumen = ___________



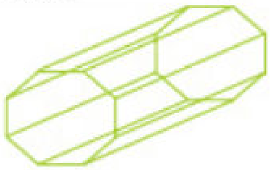
Prisma cuadrangular
Lado de la base = 2.83 cm
Altura del prisma = 10 cm
Radio = 2 cm
Volumen = ___________



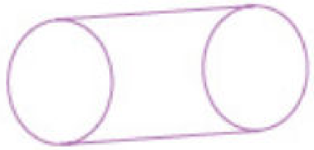
Prisma pentagonal
Lado de la base = 2.35 cm
Altura del prisma = 10 cm
Radio = 2 cm
Volumen = ___________



Prisma hexagonal
Lado de la base = 2 cm
Altura del prisma = 10 cm
Radio = 2 cm
Volumen = ___________



Prisma octagonal
Lado de la base = 1.53 cm
Altura del prisma = 10 cm
Radio = 2 cm
Volumen = ___________

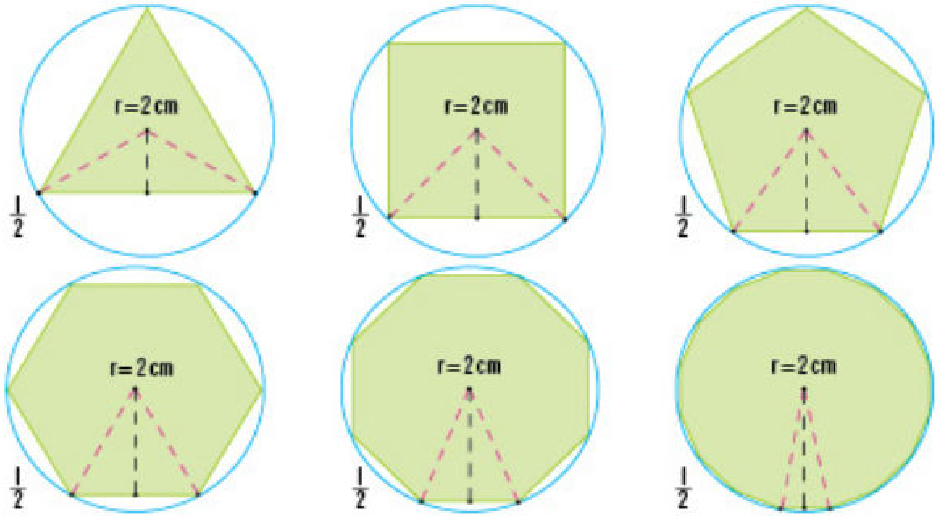


Cilindro
Radio de la base = 2 cm
Altura del prisma = 10 cm
Volumen = ___________

   a. ¿Qué dato hace falta para determinar el área de la base de cada uno de los prismas regulares?

2. Utilizando el teorema de Pitágoras, escriban el procedimiento empleado para determinar la apotema de los polígonos regulares que conforman la base de cada uno de los prismas.
   a. ¿Cuál es el procedimiento para determinar el volumen de los prismas regulares?

3. Las imagenes siguientes muestran diferentes polígonos inscritos en una circunferencia. Considerando que cada polígono es la base de un prisma, analicen en detalle la información que ofrece la imagen y después resuelvan lo que se solicita.
   a. Si continúan aumentando el número de lados en la base de los prismas, ¿a qué figura geométrica tiende a parecerse la base?
   b. Si al aumentar el número de lados de la base, continuamos aumentando a la vez el número de lados de los prismas regulares, ¿a qué cuerpo geométrico tiende a parecerse el prisma formado?
   c. Describan el procedimiento empleado para determinar el volumen de los prismas regulares.



Base de los prismas (polígonos) inscritos en una circunferencia.

4. El volumen de un cilindro puede calcularse con la fórmula para calcular el volumen de un prisma, si consideran que la base es un círculo.
   a. Escriban la fórmula para calcular el volumen del cilindro de radio r y de altura h.
   b. Describan el procedimiento empleado para determinar el volumen de un cilindro.
   c. ¿Cuál de los seis cuerpos mostrados en el punto 1 requiere menos material para construirlo?
   d. ¿Cuál de ellos tiene mayor volumen?

Con la coordinación de su profesor, comenten sus respuestas con otra pareja de compañeros y discutan la validez de los resultados obtenidos.

REFLEXIONA

1. Considera un cilindro y un cono que tengan exactamente la misma medida en su base y en su altura.
   a. ¿Cuál tiene mayor volumen?
   b. ¿Cuántas veces más volumen crees que tenga?, ¿por qué?

2. Considera ahora un cono de papel con los que se sirve agua, como el que se muestra en la imagen de la derecha.
   a. ¿Qué cantidad de agua en litros le cabe con las medidas indicadas?

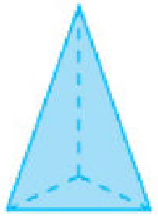
El volumen de la pirámide

Resuelve los planteamientos que se formulan.

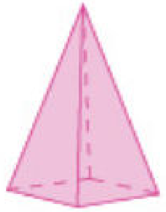
1. Con los datos proporcionados, calcula el volumen de las pirámides mostradas.

PARA SABER MÁS

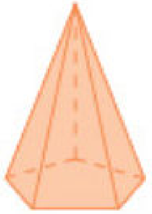
Recuerda lo siguiente.
Un metro cúbico equivale a mil litros: $1\ m^3 = 1\,000\ l$.
Un decímetro cúbico equivale a un litro: $1\ dm^3 = 1\ l$.
Un centímetro cúbico equivale a 0.001 litros: $1\ cm^3 = 0.001\ l$.



Pirámide triangular
Lado de la base = 3.46 cm
Altura de la pirámide = 10 cm
Radio = 2 cm
Volumen = ___________

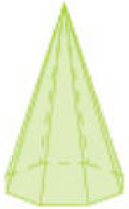


Pirámide cuadrangular
Lado de la base = 2.83 cm
Altura de la pirámide = 10 cm
Radio = 2 cm
Volumen = ___________



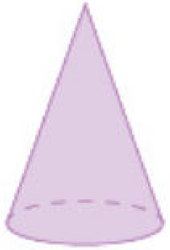
Pirámide pentagonal
Lado de la base = 2.35 cm
Altura de la pirámide = 10 cm
Radio = 2 cm
Volumen = ___________

Pirámide hexagonal
Lado de la base = 2 cm
Altura de la pirámide = 10 cm
Radio = 2 cm
Volumen = ___________



Pirámide octagonal
Lado de la base = 1.53 cm
Altura de la pirámide = 10 cm
Radio = 2 cm
Volumen = ___________

a. ¿Qué dato hace falta para determinar el área de la base de las pirámides regulares?
b. Utiliza el teorema de Pitágoras para escribir el procedimiento empleado para determinar el apotema de los polígonos regulares que conforman la base de cada una de las pirámides.
c. ¿Cuál es el procedimiento para determinar el volumen de las pirámides regulares?



Cono circular recto
Altura del cono = 10 cm
Radio = 2 cm
Volumen = ___________

2. De la misma manera que se hizo con los prismas en la actividad de las páginas 244 y 245, si continúas aumentando el número de lados en la base de las pirámides regulares, así como el número de lados de la pirámide,
   a. ¿a qué figura geométrica tiende a parecerse la base?;
   b. ¿a qué cuerpo geométrico tiende a parecerse la pirámide formada?
   c. Describe el procedimiento empleado para determinar el volumen de las pirámides regulares.

3. El volumen de un cono circular recto puede calcularse con la fórmula para calcular el volumen de una pirámide regular. Considera que la base es un círculo y resuelve lo que se pide.
   a. Escribe la fórmula para calcular el volumen de una pirámide de radio r y de altura h.
   b. Describe el procedimiento empleado para determinar el volumen de un cono circular recto.
   c. ¿Cuál de las pirámides mostradas en el punto 1 requiere menos material para construirla?
   d. ¿Cuál de ellas tiene mayor volumen?

Con la supervisión de tu profesor, comenta tus respuestas con un compañero y discutan la validez de los resultados obtenidos.

HISTORIA DE LAS PALABRAS

La palabra "volumen", del latín "*volumen*", tiene varios significados y deviene de "rollo", como los rollos de papiro, pero los significados que interesan a las matemáticas son los siguientes.

1. m. Magnitud física que expresa la extensión de un cuerpo en tres dimensiones: largo, ancho y alto. Su unidad en el Sistema Internacional es el metro cúbico (m^3).
2. m. Geom. Espacio ocupado por un cuerpo.
3. El volumen es una magnitud definida como el espacio ocupado por un cuerpo. Es una función derivada ya que se halla multiplicando las tres dimensiones.

PARA RESOLVER

Resuelve en tu cuaderno lo que se solicita.

1. En la fórmula para calcular el volumen del cilindro, $V = \pi r^2 h$, intervienen tres medidas que pueden variar y un valor constante, es decir, un valor que no cambia.
   a. ¿Cuál es el valor constante?
   b. Si el volumen de un cilindro es igual a $198\ cm^3$ y su radio es igual a 3 cm, ¿cuánto mide la altura del cilindro?
   c. Si el volumen es igual a $196.3\ cm^3$ y la altura es de 10 cm, ¿cuánto mide el radio de la base del cilindro?

Continúa...

2. Con base en la fórmula para calcular el volumen del cilindro, $V = \pi r^2 h$, completa las fórmulas equivalentes.

$h =$

$r^2 =$

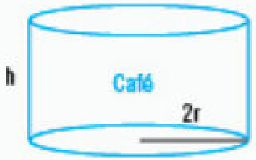
$r =$

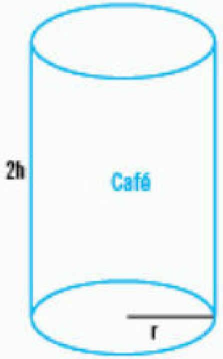
3. Considerando la fórmula del volumen del cilindro, responde las preguntas.
   a. ¿Cómo cambia el volumen si el radio de la base se duplica?
   b. ¿Cómo cambia el volumen si la altura se duplica?
   c. ¿Cómo cambia el volumen si la altura se duplica y el radio de la base se divide entre dos?

Tarea en casa

Resuelve en tu cuaderno los problemas que se plantean a continuación.

1. Un depósito de gasolina en forma de cilindro circular recto tiene una base de 10 m de diámetro y una profundidad de 12 m. ¿Cuál es el volumen máximo de gasolina que puede contener el depósito?
2. Un molino vende café en dos tipos de recipientes cilíndricos. El más alto tiene el doble de altura que el otro, pero su diámetro mide la mitad del diámetro del recipiente más bajo. La medida de café en el recipiente más alto cuesta $580 y en el más bajo $120. ¿Cuál de los dos es más económico? Explica tu respuesta.





3. Un cilindro y un cono tienen igual base e igual altura; entonces, del volumen del cono puede decirse que...
   a. es la mitad del volumen del cilindro;
   b. es igual al volumen del cilindro;
   c. es la tercera parte del volumen del cilindro;
   d. es el doble del volumen del cilindro.
4. ¿Cuál es el volumen de un cono recto que tiene una altura de 18 cm y un radio de 5 cm?

Reto

Realiza lo que se indica.

Determina el volumen de la pirámide de Kefrén si tenía una altura total original de 143.49 m y el lado de la base era de 215.25 m.

LECTURALIA

Te sugerimos leer "Lo antiguo y nuevo sobre el círculo", en el capítulo 9 del libro *Geometría recreativa*, de Yakov Perelman. Lo puedes encontrar en el sitio: http://www.librosmaravillosos.com/geometriarecreativa/capitulo09.html (consultado el 17 de marzo de 2016).

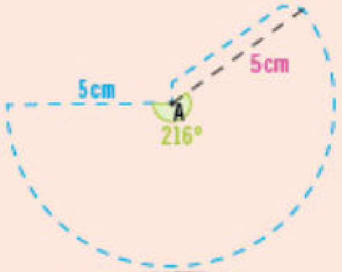
PARA TERMINAR

Reúnete con un compañero y desarrolla la actividad propuesta. Utilicen el material siguiente.

- Fólder de reuso o $\frac{1}{2}$ pliego de cartulina del cualquier color.
- Juego de geometría.
- Lápiz adhesivo.
- 200 g de arena.
- Tijeras de punta roma

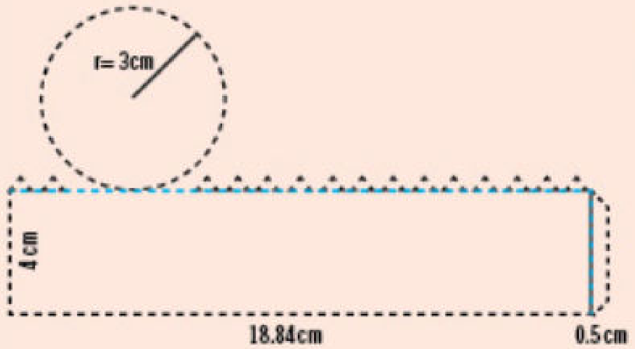
Con este material van a construir un cono circular recto, mediante un ángulo de sector de 216° y un cilindro recto. Las indicaciones para la construcción de ambos cuerpos geométricos se ofrecen a continuación.

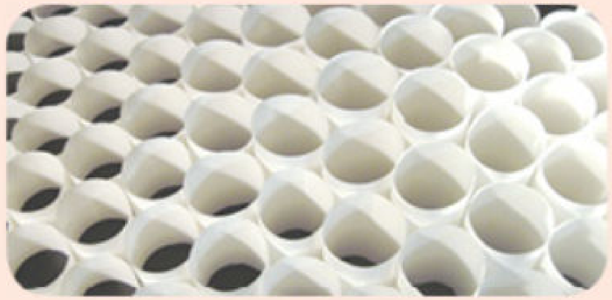
Construcción de un cono recto



1. Marquen un punto A en la cartulina.
2. Tracen la línea punteada de color negro de 5 cm.
3. Con el transportador marquen el ángulo de 216° como se muestra en la figura.
4. Tracen la línea de color azul de 5 cm, remarcándola con una pluma.
5. Unan con el compás los extremos de las rectas, tomando como centro el punto A.
6. Tracen la pestaña sobre la línea negra.
7. Recorten la cartulina por la línea punteada.
8. Unten lápiz adhesivo sobre la pestaña y péguenla para formar el cono.

Continúa...





Construcción de un cilindro recto

1. Sobre la cartulina tracen un rectángulo de 18.84 cm por 4 cm. En un extremo delineen una pestaña de 0.5 cm de ancho.
2. Tracen una circunferencia de 3 cm de radio sobre el rectángulo, como se muestra en la figura.
3. Tracen varios triángulos pequeños sobre la línea azul. Éstos harán la función de pestañas.
4. Remarquen con pluma la línea de color azul de 18.84 cm.
5. Recorten la cartulina por la línea punteada.
6. Unten lápiz adhesivo sobre las pestañas, la de 0.5 cm y los triángulos pequeños, y péguenlas para formar el cilindro.

1. Cuando hayan concluido la construcción del cono y del cilindro, tomen su regla y efectúen las mediciones necesarias para contestar las preguntas.
   a. ¿Cuánto mide el radio de la base del cono?
   b. ¿Cuánto mide la altura del cono?
   c. ¿Cuánto mide el radio de la base del cilindro?
   d. ¿Cuánto mide la altura del cilindro?
   e. ¿Cómo son los radios y las alturas del cono y del cilindro rectos?

2. Van a emplear el cono como unidad de medida. Llénenlo de arena hasta el ras y vacíenlo en el cilindro. Repitan la operación hasta que el cilindro quede también lleno al ras. Después resuelvan los planteamientos.
   a. Del cono y el cilindro, ¿cuál tiene mayor volumen?
   b. ¿Con cuántos conos llenos de arena se llena el cilindro hasta el ras?
   c. Escriban la fórmula para calcular el volumen de un cilindro recto de radio r y altura h.
   d. ¿Cuál es la relación de proporción de volumen que existe entre un cono y un cilindro circular recto que tienen el mismo radio r y la misma altura h?
   e. ¿Cuál es el procedimiento para determinar el volumen del cono circular recto?
   f. Considerando el inciso e, escriban la fórmula para calcular el volumen de un cono circular recto de radio r y altura h, según lo observado en el experimento.

Con la supervisión de su profesor, comenten sus respuestas con otras parejas de compañeros y discutan la validez de los resultados obtenidos.

LECCIÓN 4

ESTIMACIÓN Y CÁLCULO DEL VOLUMEN DE CILINDROS Y CONOS O DE CUALQUIERA DE LAS VARIABLES IMPLICADAS EN LAS FÓRMULAS

Las formas cilíndricas y cónicas se pueden usar para construir diferentes objetos, por ejemplo, envases para pintura; tanques de almacenamiento de agua, vino o combustible; conos viales, silos y estructuras cónicas. La capacidad o volumen de estos objetos es muy importante para los fabricantes de envases o depósitos y por esto es necesario saber cómo calcularlos. Al cambiar el diámetro, radio o altura de objetos que tengan dichas formas, reflexiona y responde.

- ¿Siempre cambiará su volumen?
- ¿De qué depende que aumente o disminuya?
- ¿Cómo se calcula el volumen de un tanque cilíndrico?
- ¿Cómo se calcula el volumen de un cono?

PARA COMENZAR

Lee el planteamiento y resuelve.

Valentín trabaja en una empresa que vende tanques de agua de forma cilíndrica, como el que se muestra en la figura. Su jefe le encargó que hiciera una tabla para el catálogo con los diferentes tipos de tanques y sus medidas. Él ha registrado algunas dimensiones; ayúdalo a completar la tabla.

Tipo	Diámetro (m)	Altura (m)	Volumen (m^3)
A	2.20		11.7841416
B	2.40	3.80	
C		3.52	24.881472

Con la información obtenida, contesta las preguntas que se plantean a continuación.

1. ¿Cuánto mide la altura del tanque tipo A?
2. ¿Cuánto mide el volumen del tanque tipo B?
3. ¿Cuánto mide el diámetro del tanque tipo C?

Reúnete con un compañero y compartan sus resultados. Con ayuda del profesor, determinen si existen diferencias, identifiquen la causa y efectúen las correcciones que sean necesarias.

MATEMÁTICAS HISTÓRICAS

Demócrito de Abderea(460 a.n.e.- 370 a.n.e.), filósofo y matemático griego, cuyo nombre significa "escogido del pueblo" y conocido en su tiempo por los sobrenombres de *Milesio* o *Abderita*, encontró la fórmula para obtener el volumen de una pirámide y demostró que esa misma fórmula puede usarse para calcular el volumen de un cono: $\frac{b \times h}{3}$

De hecho, se le atribuyen dos importantes resultados.

- El volumen de un cono es igual a un tercio del volumen de un cilindro de igual base y altura.
- El volumen de una pirámide es un tercio del volumen del prisma de igual base y altura.

Aunque escribió varios tratados de geometría y astronomía, los cuales desafortunadamente se han perdido, Demócrito es más conocido por su teoría atómica.

Fuente: *TimeRime*

Reto

A partir de la fórmula para calcular el volumen del cilindro, determina lo siguiente en tu cuaderno.

1. Considerando el volumen y el radio, ¿cuál es la fórmula que nos permite obtener la medida de la altura?
2. ¿Cuál es la fórmula para calcular la medida del radio a partir de las medidas del volumen y la altura?

El volumen del cilindro y las variables que lo determinan

Reúnete con un compañero y desarrollen en su cuaderno las actividades propuestas.

1. Un envase para un galón de pintura mide 20.5 cm de altura y 16.5 cm de diámetro. Considerando esta información resuelvan lo que se solicita a continuación.
   a. ¿Cuánto mide el volumen del envase?
   b. Si la altura de ese envase disminuye $\frac{26}{41}$ veces y el diámetro disminuye $\frac{7}{11}$ veces, se obtienen aproximadamente las medidas del envase para un litro de pintura. ¿Cuánto miden el diámetro y la altura de ese envase para 1 l?
   c. Al disminuir $\frac{21}{41}$ veces la altura y $\frac{17}{33}$ veces el diámetro del envase para un galón, se obtienen aproximadamente las medidas del envase para $\frac{1}{2}$ l de pintura. ¿Cuánto miden sus dimensiones?
   d. Si disminuyen la altura y el diámetro $\frac{16}{41}$ veces y $\frac{4}{11}$ veces, respectivamente, se pueden obtener aproximadamente las medidas del envase para $\frac{1}{4}$ de litro pintura. ¿Cuánto miden las dimensiones?
   e. ¿Cuánto mide el volumen de los envases con capacidad para 1 l, $\frac{1}{2}$ l y $\frac{1}{4}$ de l de pintura?

Algunos envases de pintura expresan su capacidad en unidades del sistema métrico decimal (litros), pero algunos otros vienen en unidades del sistema inglés (galones).

La medida del radio y la altura de los tanques determinarán su capacidad.

2. En la industria se emplean grandes tanques para almacenar líquidos. En la tabla se muestran algunas medidas de diferentes tanques de almacenamiento.

Capacidad (gal)	Volumen (in³)	Diámetro (in)	Altura (in)
2000	462000		144
3000	693000		
5000		83683	210
8000	1848000		
10000	2310000		

Considerando la información de la tabla, resuelvan lo que se solicita a continuación.

a. ¿Cuánto mide el diámetro del tanque de 2000 gal, si su volumen mide 462000 in³?
b. Si el diámetro de los tanques de 2000 gal y 3000 gal de capacidad mide lo mismo, ¿cuánto mide la altura y el diámetro del tanque de 3000 gal?
c. ¿Cuánto mide el volumen del tanque cuya capacidad es de 5000 gal?
d. Si se sabe que el radio de los tanques de 8000 gal y 10000 gal de capacidad mide 6 in más que el radio del tanque de 5000 gal, ¿cuánto miden el diámetro y la altura de los tanques de 8000 gal y 10000 gal?
e. Supongamos que para un tanque de 1000 gal de capacidad se consideran las dimensiones del tanque de 2000 gal y la altura disminuye a la mitad, ¿qué sucedería con el volumen?
f. Si se necesitara un tanque para almacenar 6000 gal, considerando el diámetro del tanque de 3000 gal, ¿cuánto mediría el diámetro y la altura de dicho tanque?

TIC

Te invitamos a resolver los problemas acerca del tema en los los sitios siguientes.
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Volumenes_d3/VOLUMENES_3.htm
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Volumenes_d3/VOLUMENES_4.htm (consultados el 17 de marzo de 2016).

Comparen sus respuestas con otros compañeros. Si encuentran diferencias, analicen a qué se debieron y, con ayuda del profesor, corrijan lo que sea necesario.

El volumen del cono y las variables que lo determinan

1. El cono vial de la imagen cuenta con una base cuadrada y tiene un diámetro de 13 cm y una altura de 25 cm. Con las medidas suministradas, resuelve lo que se solicita a continuación.
   a. ¿Cuánto mide aproximadamente el volumen de este cono?
   b. Si el diámetro de otro cono mide 20 cm y su altura 41 cm, ¿cuánto mide su volumen?
   c. Considerando que el volumen de un tercer cono mide 29184.155 cm³ y su altura 91 cm, ¿cuánto mide el diámetro de su base?

Los conos viales se fabrican en material plástico ligero. Puesto que no terminan en punta, pueden considerarse conos truncados.

d. Si el diámetro de la base y la altura del cono midieran 27 cm y 45 cm, respectivamente, ¿cuánto mediría su volumen?

e. Al considerar que el diámetro de la base de un cono mide 35 cm y su volumen 22 770.055 cm³, ¿cuánto mide su altura?

Con ayuda de tu profesor, reúnete con un compañero y compartan sus resultados. Si existen diferencias, determinen la causa y efectúen las correcciones necesarias.

REFLEXIONA

1. Si se conoce la medida del volumen y la altura de un cono, ¿cuál es la fórmula que nos permite obtener la medida del radio?
2. Si se conoce la medida del volumen y el radio de un cono, ¿cuál es la fórmula que nos permite obtener la medida de la altura?

PARA RESOLVER

Lee el planteamiento y resuelve lo que se indica en tu cuaderno.

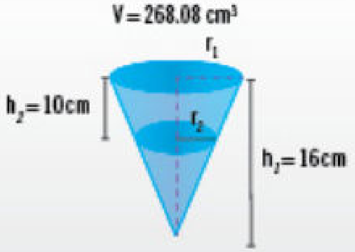
Un cono de concreto mide 4 m de altura y 1.5 m de radio, ¿cuánto mide su volumen?

1. Contesta las preguntas.
   a. ¿Cuánto mediría el volumen del cono si la altura y el diámetro midieran lo mismo?
   b. Supongamos que disminuye la medida del radio en una tercera parte, ¿qué sucedería con la medida del volumen?
   c. Y si disminuyera una cuarta parte la medida de la altura, ¿qué sucedería con la medida del volumen?
   d. Suponiendo que se quisiera aumentar el volumen del cono al doble, ¿cuánto medirían el radio y la altura?

En Valencia, España, se encuentra la Ciudad de las Ciencias y las Artes, donde se pueden apreciar conos gigantes de concreto.

Reto

Un carpintero hizo un corte paralelo a la base de un cono de madera. Observa la imagen siguiente.



1. Escribe el volumen del cono de 16 cm de altura en función del radio r_1. Toma en cuenta la fórmula $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
2. En la formula obtenida, sustituye los valores dados para el volumen y la altura.
3. Determina el radio del cono $r_1 =$ ______
4. Designa con h_2 la altura y con r_2 el radio del cono truncado. Completa los espacios en blanco para establecer la proporción entre las medidas de las alturas y los radios.

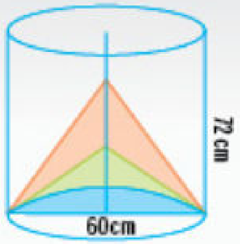
$$\frac{h_2}{r_2} = \frac{\square}{\square}$$

5. Determina el radio del cono truncado.

Tarea en casa

Se quiere hacer una perforación cónica en un cilindro de plástico. La medida del diámetro de la perforación sería igual a la medida del diámetro del cilindro.

Al considerar dos opciones, una en la que la altura del cono mida la tercera parte de la altura del cilindro y otra en la que la altura del cono mida dos terceras partes de la altura del cilindro, responde lo siguiente.

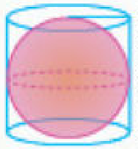


Medidas de un cono extraído de un cilindro.

1. ¿Cuánto mediría el volumen de la pieza que resulte después de la primera perforación cónica?
2. ¿Cuánto mediría el volumen de la pieza resultante después de la otra perforación cónica?

PARA SABER MÁS

Arquímedes encontró la fórmula para obtener el volumen de una esfera considerando una semiesfera, un cono y un cilindro. Se dice que pidió que la imagen de una esfera circunscrita en un cilindro se pusiera en su tumba.

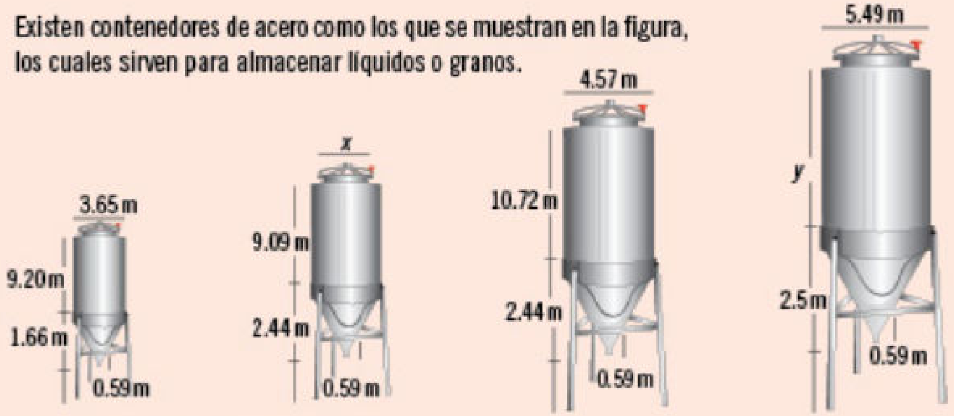


Arquímedes encontró que una esfera mide $\frac{2}{3}$ (dos terceras partes) del volumen del cilindro que la circunscribe.

PARA TERMINAR

Analiza el planteamiento y responde en tu cuaderno lo que se pide.

Existen contenedores de acero como los que se muestran en la figura, los cuales sirven para almacenar líquidos o granos.



1. Responde las preguntas siguientes.
   a. ¿Cuánto mide el volumen de la parte cilíndrica del primer y el tercer silos?
   b. ¿Cuánto mide el volumen de la parte cónica del primer y el tercer silos?
   c. Si el volumen del segundo silo mide 162.44 m³, ¿cuánto mide su diámetro?
   d. ¿Cuánto mide la altura de la parte cilíndrica del cuarto silo si el volumen mide 288.87 m³?

Con la guía del profesor comparte tus respuestas con tus compañeros y discutan sobre los procedimientos que llevaron a cabo para obtenerlas.

LECTURALIA

Te invitamos a resolver el problema 4, "Dos botes", del capítulo 11 del libro *Geometría recreativa*, de Yakov Perelman. Lo puedes encontrar en el sitio electrónico: http://www.librosmaravillosos.com/geometriarecreativa/capitulo11.html (consultado el 17 de marzo de 2016).

LECCIÓN 5

ANÁLISIS DE SITUACIONES PROBLEMÁTICAS ASOCIADAS A FENÓMENOS DE LA FÍSICA, LA BIOLOGÍA, LA ECONOMÍA Y OTRAS DISCIPLINAS, EN LAS QUE EXISTE VARIACIÓN LINEAL O CUADRÁTICA ENTRE DOS CONJUNTOS DE CANTIDADES

Como hemos visto hasta ahora, las matemáticas forman parte de nuestra vida cotidiana y explican la mayoría de los fenómenos que suceden a nuestro alrededor. Por esta razón, no es extraño que todas las ciencias utilicen a las matemáticas para representar o modelar sus diferentes fenómenos o experimentos en estudio. Se pueden citar algunos ejemplos.

En física, las matemáticas se utilizan para determinar el punto de equilibrio de cuerpos u objetos, como en un "sube y baja", o para determinar la intensidad de sonido de cualquier dispositivo, como el de una bocina colocada a cierta distancia de quien escucha.

En biología, las matemáticas son útiles para determinar las características genéticas de una población, que podría ser de mosquitos o bacterias.

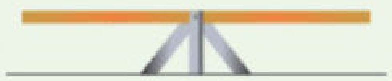
En economía, las matemáticas permiten determinar el costo de los procesos y de la fabricación de productos, como una vacuna, un mueble o un auto, o para determinar las ganancias netas que generará la venta de los productos.

- ¿En qué otra ciencia se podrían aplicar las matemáticas?, ¿de qué manera?
- Cuando se habla de "modelar" un fenómeno, ¿por qué se hace referencia a las matemáticas?

PARA COMENZAR

Analiza el planteamiento y desarrolla lo que se propone.

Ana y su papá están de vacaciones y han decidido construir un pequeño "sube y baja" para jugar. Para esto han dispuesto un punto de apoyo sobre el cual se colocará un tabla de madera, tal y como se muestra en la imagen de al lado.



El punto de apoyo del "sube y baja" recibe el nombre de fulcro.

El papá de Ana pesa 90 kg y ella 45 kg, por lo que al colocarse a la mitad de la tabla, Ana no podrá levantar a su papá. ¿Cuál será la distancia adecuada a la que deberá colocarse el punto de apoyo de la tabla, para que Ana pueda levantar a su papá?

El juego "sube y baja" funciona como una palanca simple, de tal manera que el juego estará en equilibrio cuando las fuerzas que producen el giro, llamadas "momentos", sean iguales.

En física, los momentos M de una palanca se definen como el producto del peso por la distancia del mismo al punto de apoyo. Por tanto, se tienen dos momentos que deben ser iguales: $M_a = M_b$

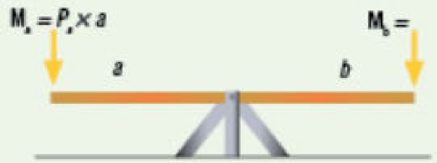
Continúa...

1. Con la información y datos suministrados, resuelve los planteamientos siguientes.
   a. El momento que produce Ana, y al cual llamaremos M_a, se define como $M_a = P_a \times a$, donde la variable P_a representa el peso de Ana y la variable *a* representa la distancia entre el punto de apoyo y el extremo de la tabla donde se sienta Ana. Así, el momento que produce Ana se puede expresar como:

$$M_a = P_a \times a = 45a$$

HISTORIA DE LAS PALABRAS

La palabra "genética" proviene del griego "*genetikos*", que significa "origen" o "nacimiento".



Si llamamos P_b al peso del Papá de Ana y b a la distancia entre él y el punto de apoyo, determina el momento que produce el papá de Ana.

   b. Con base en la información obtenida, escribe en los espacios la expresión que relaciona los momentos en el "sube y baja" en equilibrio, con los pesos de Ana y su papá.

$$M_a = M_b$$

$$(\square\ \square) = (\square\ \square)$$

   c. Con base en la ecuación anterior, despeja la distancia a para escribir la relación que expresa la distancia a en función de la distancia b.
   d. Utilizando la expresión encontrada, completa la tabla siguiente con los valores propuestos para b.

Distancia b	Distancia a	Distancia a + b
0.5		
1		
1.5		
2		
2.5		
3		

   e. Traza en tu cuaderno cuadriculado un plano cartesiano, localiza los puntos encontrados (a, b) y únelos con una línea.
      - ¿Qué gráfica resultó: lineal, cuadrática o de otro tipo?
      - Considerando la información que arroja la gráfica anterior, ¿de qué manera están relacionadas las distancias a y b?
      - ¿Qué longitud expresa la distancia a + b?
   f. Si el papá de Ana compra una tabla de 6 m, ¿a qué distancia de donde se sentará Ana deberá quedar el punto de apoyo para lograr el equilibrio?

Con ayuda de tu profesor, reúnete con un compañero y compartan sus resultados. Si existen diferencias, determinen la causa y efectúen las correcciones necesarias.

Problema en el que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades: modelo matemático para costos, ingresos y ganancias

Con la guía de tu profesor, reúnete con un compañero y desarrollen la actividad.

Un pequeño taller de carpintería se especializa en fabricar mesas rústicas. Para establecer las ganancias mensuales, el dueño del taller debe determinar los gastos de manufactura y los ingresos por ventas.

1. Señalen los costos $C(x)$ del taller. Completen la tabla con los datos y valores calculados durante un mes, considerando que por cada mesa se debe invertir en material \$300. Adicionalmente, el taller debe pagar \$15 000 de renta y \$1 000 de luz al mes.

Número de mesas producidas	Costo al producir cada mesa	Costos fijos	Razón entre los lados
1		16 000	16 300
2	$2 \times 300 = 600$		
5		16 000	
10	$10 \times 300 = 3000$		19 000
25			
x	$C_v(x) =$	$C_f(x) =$	$C_T(x) = C_v(x) + \boxed{}$

2. Con los datos obtenidos en la tabla, resuelvan lo que se solicita a continuación, si el taller produce al mes x mesas.
   a. ¿Cuáles son los costos fijos $C_f(x)$ del taller o que no varían al producir las mesas mes a mes?
   b. Grafiquen en sus cuadernos los puntos obtenidos $(x, C_f(x))$. Utilicen una escala en el eje horizontal (o de las x) de 1 y en el vertical de 1 000 por cada marca.
   c. ¿Qué tipo de función es la función de costos fijos?
   d. ¿Cuáles son los costos variables $C_v(x)$ del taller o que varían al producir las mesas mes a mes? Escriban la expresión matemática que representa la inversión necesaria para producir $C_v(x)$ cantidad de mesas al mes.
   e. Grafiquen en sus cuadernos los puntos obtenidos $(x, C_v(x))$. Utilicen una escala en el eje horizontal (eje de las $C_v(x)$ de 1 y en el vertical de 1 000 por cada marca.
   f. ¿Qué tipo de función es la función de costos variables?
   g. ¿Cuál es la expresión matemática que representa todos los costos o costos totales $C_T(x)$ del taller?
   h. Grafiquen en sus cuadernos los puntos obtenidos $(x, C_T(x))$. Utilicen una escala en el eje horizontal (eje de las x) de 1 y en el vertical de 1 000 por cada marca.
   i. ¿Qué tipo de función es la función de costos totales?

3. Obtengan los ingresos $I(x)$ del taller. Completen la tabla considerando que cada mesa se vende a \$650 y que se venden todas las mesas que se producen al mes.

Número de mesas producidas	Ingreso $I(x)$ al producir y vender cada mesa
1	
2	$2 \times 650 = 1300$
5	
10	$10 \times 650 = 6500$
25	
x	$I(x) =$

4. Con los datos obtenidos en la tabla, resuelvan lo que se solicita a continuación, si el taller vende al mes x mesas.
   a. Escriban una expresión que represente los ingresos al vender x mesas al mes.
   b. ¿Qué tipo de función es la función de ingresos?

5. Obtengan las ganancias $G(x)$ del taller. Completen la tabla considerando que la ganancia $G(x)$ es el ingreso $I(x)$ menos el costo total $C_T(x)$.

Número de mesas producidas	Ingreso al vender cada mesa	Costo total al producir cada mesa	Ganancia al producir y vender cada mesa
1		16 300	−15 650
2	$2 \times 650 = 1300$		
5		17 500	−12 500
10	$10 \times 650 = 6500$		
25			
x	$I(x) =$	$C_T(x) =$	$G(x) = I(x) - \boxed{}$

6. Con los datos obtenidos en la tabla, resuelvan lo que se solicita a continuación, si el taller produce al mes x mesas y las vende todas.
   a. Escriban una expresión que represente la ganancia obtenida en un mes al producir y vender x mesas.
   b. Grafiquen en sus cuadernos los puntos obtenidos $(x, G(x))$. Utilicen una escala en el eje horizontal (eje de las x) de 1 y en el vertical de 1 000 por cada marca.
   c. ¿Qué tipo de función es la función de ganancias?
   d. ¿Qué significa la ganancia negativa obtenida al producir y vender una sola mesa?
   e. ¿Cuál será la ganancia si el taller logra producir y vender 15 mesas al mes?

Comenten sus respuestas con otra pareja de compañeros. En caso de encontrar diferencias, determinen a qué se debieron y, con la ayuda de su profesor, efectúen las correcciones necesarias.

TIC

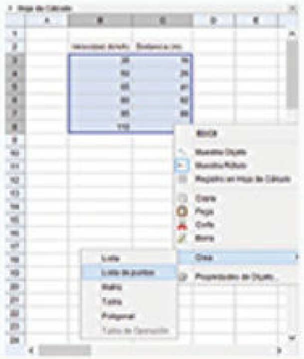
En un laboratorio se están poniendo a prueba diferentes tipos de llantas para determinar la distancia a la que un automóvil puede frenar. Se desea obtener experimentalmente un modelo que permita determinar su comportamiento. Un problema de esta naturaleza puede ser resuelto mediante programas como GeoGebra, como se indica a continuación.

1. En el menú **Vista**, elige la opción **Hoja de Cálculo**. Escribe en las celdas correspondientes la información presentada.

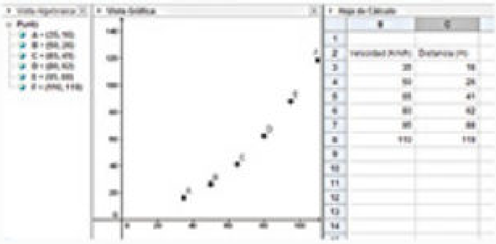
Hoja de Cálculo

	A	B	C
1			
2		Velocidad (Km/h)	Distancia (m)
3		35	16
4		50	26
5		65	41
6		80	62
7		95	88
8		110	119
9			

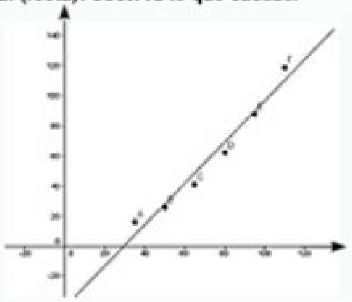
2. Selecciona los datos pulsando y arrastrando el botón izquierdo del ratón. Seguido de esto, haz clic con el botón derecho y selecciona la opción **Crea** y elige **Lista de puntos**.



3. En la vista gráfica elige una escala adecuada que te permita observar los puntos que representan los datos obtenidos en el experimento. También los podrás visualizar en la vista algebraica.



4. En la barra de comandos escribe: **Ajuste Polinómico [A,B,C,D,E,F,1]**, donde A, B, C, D, E y F son los puntos marcados en el plano cartesiano y el número "1" es el grado del polinomio, en este caso, una función lineal (recta). Observa lo que sucede.



Reto

En la actividad de la carpintería, de las páginas 258 y 259, determinaste las funciones de costo total $C_T(x)$ y la función ingreso $I(x)$ para la fabricación y venta de mesas.

1. ¿Cuántas mesas se deberán fabricar y vender para que el taller no pierda ni gane? Es decir, ¿cuál será el punto de empate?
2. Traza en tu cuaderno ambas funciones con una escala adecuada y señala el punto de equilibrio.

PARA RESOLVER

Resuelve en tu cuaderno lo que se pide.

La distancia de frenado d, en pies (ft), de un automóvil que viaja a una velocidad v, en millas por hora, es la siguiente.

$$d = v + \frac{v^2}{20}$$

1. ¿A qué velocidad debe viajar para poder frenar en 15 m?
2. Traza una gráfica que relacione la distancia de frenado recorrida por el automóvil con la velocidad a la que viaja.

Tarea en casa

Analiza los problemas siguientes y contesta las preguntas.

1. De acuerdo con la ley de Hooke, la fuerza en kg necesaria para estirar x centímetros un determinado resorte, con respecto a su longitud en reposo, es $F=4.5x$.
   a. ¿Cómo es la variación de la elongación o estiramiento del resorte?
   b. ¿Cuál será la fuerza que se necesita aplicar al resorte para que se estire 36 cm?
   c. Traza en tu cuaderno la gráfica que muestre la relación entre la fuerza y el estiramiento del resorte.
2. Una maquiladora que fabrica pantalones de mezclilla ha determinado que el costo de fabricación de su producto más vendido está dado por la función siguiente.

$$C(x)=150x+12\,500$$

Y los ingresos correspondientes están dados por la función:

$$I(x)=550x$$

   a. ¿Cuántos pantalones deberá producir y vender para obtener una ganancia de $195 100?
   b. ¿Cuántos pantalones deberá producir y vender para no perder ni ganar nada?
   c. Traza en una misma gráfica las dos funciones y determina el punto de equilibrio.

PARA SABER MÁS

Las ecuaciones cuadráticas y las cónicas tienen una estrecha relación entre sí. La ecuación completa de segundo grado representa diferentes cónicas de acuerdo con los valores que tomen sus parámetros.

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2f + c = 0$$

Por ejemplo, si:
- $h^2 > ab$ la ecuación representará una hipérbola.
- $h^2 = ab$ la ecuación representará una parábola.
- $h^2 < ab$ la ecuación representará una elipse.
- $a = b$ y $h = 0$ la ecuación representará una circunferencia.

LECTURALIA

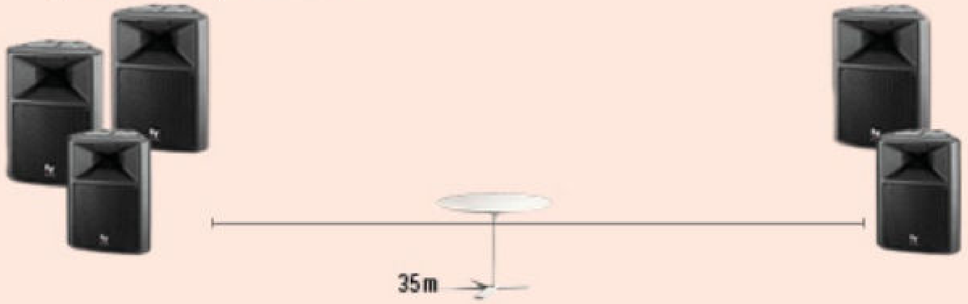
El ancho de un río, una pizza en muchos pedacitos y más puedes resolver en el libro *Matemática… ¿estás ahí? La vuelta al mundo en 34 problemas y 8 historias*, de Adrián Paenza. Disponible en http://cms.ds.uba.ar/material/paenza/ (consultado el 17 de marzo de 2016).

PARA TERMINAR

Con la ayuda de tu profesor, reúnete con un compañero y desarrollen la actividad.

Ángel está instalando un sistema de audio para ambientar un salón de fiestas, para esto cuenta con cinco gabinetes de bocinas que tienen una potencia de 200 watts (W) cada uno. Ha decido repartirlos en dos grupos, uno de tres gabinetes y otro de dos, separándolos a una distancia de 35 m, tal y como se ilustra en la imagen. ¿Dónde debería colocarse la mesa principal si se desea que ambos grupos de bocinas se escuchen con la misma intensidad en ese punto?

1. Para responder a esta pregunta analicen la información que se presenta a continuación y resuelvan lo que se solicita.



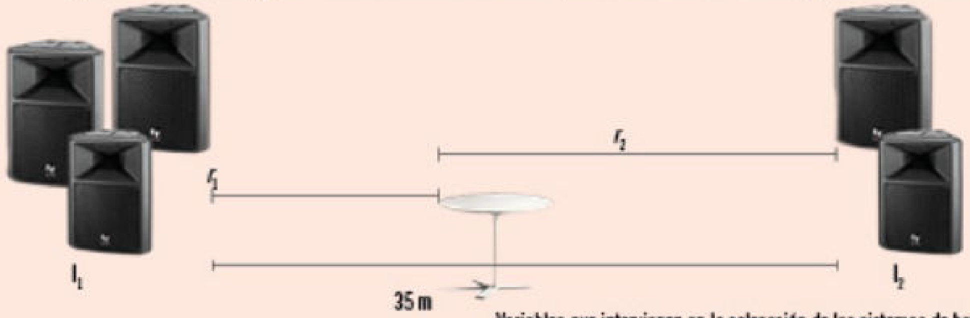
a. La intensidad (I) con la que se escucha el sonido producido por cada grupo de bocinas está relacionada con la expresión siguiente.

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}$$

Donde P corresponde a la potencia de cada grupo de bocinas y r es la distancia entre la fuente sonora y el oyente. De este modo, la potencia producida por el grupo de tres gabinetes de bocinas será P = 3 × 200 W = 600 W.

- Calculen la potencia producida por el conjunto de dos gabinetes.

2. En la imagen siguiente se ha representado a la distancia entre el conjunto de tres gabinetes y la mesa como r_1 y a la distancia entre el conjunto de dos gabinetes y la mesa como r_2.



Variables que intervienen en la colocación de los sistemas de bocinas.

a. ¿Cómo debe ser la intensidad del sonido I_1 (producida por los tres gabinetes), respecto a la intensidad de sonido I_2 (producida por los dos gabinetes) para que ambos conjuntos se escuchen con la misma intensidad en la mesa? Escriban una expresión matemática que relacione a I_1 con I_2.

Continúa...

b. En la imagen anterior la distancia entre el grupo de tres gabinetes y la mesa se ha denotado como r_1. Tomando en cuenta sólo este grupo de bocinas, escriban la expresión matemática que representa la intensidad (I_1) a la que se escucha el sonido.

c. En la imagen, la distancia entre el segundo grupo de gabinetes y la mesa se ha denotado como r_2. Escriban una expresión matemática que relacione la distancia r_1 con r_2 y la distancia total entre las bocinas.

r_2 = ☐ – ☐

3. Completen la tabla para algunos valores de r_1.

r_1	r_2	$r_1 + r_2$
1		
2	33	
3		35

a. En sus cuadernos, grafiquen los puntos (r_1, r_2) y únanlos. ¿Qué tipo de gráfica resultó?

b. ¿De qué manera varía la distancia r_2 al cambiar r_1?

c. ¿Varía la suma $r_1 + r_2$? Expliquen por qué sí o por qué no.

4. Tomando en cuenta el grupo de dos gabinetes de bocinas, escriban la expresión matemática que representa la intensidad (I_2) con que se escucha el sonido en la mesa principal.

a. Sustituyan en la expresión que encontraron en el inciso a del punto 2 las expresiones correspondientes a I_1 y I_2. Escriban la relación, simplificando si es posible.

$$\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

b. Desarrollen la expresión. ¿Qué tipo de expresión matemática resulta?

☐ = ☐

c. ¿Qué tipo de ecuación da por resultado? Resuélvanla.

d. ¿Cuántas soluciones encontraron?, ¿son válidas todas ellas?

5. Considerando los resultados obtenidos, ¿cuál es la distancia a la que se deberá colocar la mesa para cumplir la condición del problema? Expliquen por qué eligieron esta solución.

Comenten sus respuestas con otra pareja de compañeros. En caso de encontrar diferencias, con ayuda de su profesor, determinen a qué se deben y efectúen las correcciones que sean necesarias.

MANEJO DE LA INFORMACIÓN

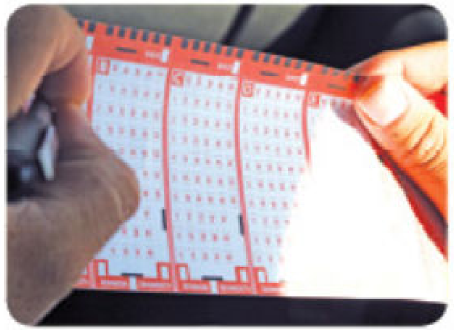
LECCIÓN 6

ANÁLISIS DE LAS CONDICIONES NECESARIAS PARA QUE UN JUEGO DE AZAR SEA JUSTO, CON BASE EN LA NOCIÓN DE RESULTADOS EQUIPROBABLES Y NO EQUIPROBABLES

Desde tiempos inmemoriales el juego ha despertado una pasión en ciertos sectores de la sociedad, de ahí que casi en todo el mundo existan sorteos de números, como el Melate, o de billetes, como el de la Lotería Nacional.

Uno de los juegos más antiguos es el juego de dados. Lanzar dos dados, y apostar a que ciertos números resultarán más probables de aparecer que otros, reúne a personas que, en esta obsesión, pueden llegar a perder grandes fortunas.

Querer dominar los resultados de un juego de azar ha sido, en efecto, una obsesión de muchos. En estos juegos la superstición se mezcla con la objetividad.



En el Melate se eligen seis números entre 56 posibles. La posibilidad de "atinar" a los seis es casi nula.

- ¿Cuándo se dice que un juego es legal?
- ¿Crees que ciertos números en la Lotería Nacional tienen más oportunidad de resultar ganadores que otros?
- ¿Consideras que es más fácil ganar en la lotería que en el Melate?

PARA COMENZAR

Con la guía del profesor, formen equipos de cuatro estudiantes y consigan dos dados por equipo. De común acuerdo, en cada equipo se formarán dos parejas para desarrollar las actividades.

1. Ambas parejas del equipo anotarán en un cuaderno el resultado que crean que aparecerá con más frecuencia al lanzar los dos dados (un número entre el 2 y el 12).
2. A continuación, cada una de las parejas del equipo lanzará 10 veces los dados, se pueden turnar para ello. Por cada lanzamiento deben anotar el número que se obtiene. Ganará la pareja del equipo que predijo el número que más veces se obtuvo al lanzar los dos dados.
3. Con ayuda de su profesor, todos los equipos listarán en el pizarrón su información. De esta manera, en el pizarrón deben escribirse tres datos por cada equipo: el número que propuso la primera pareja, el número que propuso la segunda pareja y el número que más veces se obtuvo al lanzar los dados.

Continúa...

a. Analicen la información y respondan las preguntas.
   - ¿Cuál fue el resultado que más apareció en los lanzamientos?
   - ¿Es el mismo que el preferido por las parejas?
   - ¿Por qué consideran que sucede esto?

b. Ahora listen en forma de rectángulo todos los posibles resultados al lanzar los dos dados.
   Ejemplo:

   (1, 1), (1, 2), ... ,(1, 6)

   (2, 2), (2, 3), ... ,(2, 6)

c. ¿Cuántos posibles resultados son?

d. Al realizar un lanzamiento, ¿alguno de ellos presenta mayor probabilidad de aparecer que otro?

4. Ahora agrupen, de estos resultados, los que correspondan al resultado cuya suma sea 2, 3, hasta 12, por ejemplo, (1, 2) y (2, 1) suman 3.
   a. Calculen la probabilidad de cada resultado
   b. ¿Coincide el resultado más probable con el que más salió?, ¿por qué?
   c. ¿Cuál fue un pronóstico supersticioso?
   d. ¿Cuál será un pronóstico objetivo?

Con la orientación de su profesor, expongan sus conclusiones en una discusión grupal.

MATEMÁTICAS HISTÓRICAS

John von Neumann (1903-1957) fue ingeniero y matemático húngaro. En 1928 realizó un estudio sobre los juegos de estrategia.

En 1928, con John von Neumann, nació la teoría de los juegos, con la que comenzó el interés por el desarrollo de estrategias en el caos combinatorio. Fue entonces que el juego dejó de serlo para convertirse en una herramienta de la lógica, de la matemática, del desarrollo de la inteligencia artificial y fundamento de las teorías económicas que rigen a los países.

Fuente: *Teoría de juegos*, de Fernando Contreras *et al.*

PARA SABER MÁS

Cuando en un espacio muestral todos los resultados tienen la misma oportunidad de aparecer se le denomina "espacio muestral equiprobable".

Cuando en un espacio muestral no todos los resultados tienen la misma oportunidad de aparecer, es decir, algunos tienen más probabilidad de aparecer que otros, se le denomina "espacio muestral no equiprobable".

Experimento de probabilidades sin reemplazo

Con la cooordinación de su profesor, formen equipos de tres estudiantes y consigan 7 bolitas de unicel del mismo tamaño: 3 deberán pintarse de verde y las 4 bolitas restantes deberán pintarse de azul.

PARA SABER MÁS

Un juego donde todos los participantes tienen la misma oportunidad de ganar se denomina "juego legal".

AFORISMOS

"No se debe confundir la verdad con la opinión de la mayoría."

Jean Cocteau (1889-1963), escritor, dibujante y director de cine francés.

¿Los resultados que arrojan las matemáticas dependen de la opinión de las personas?, ¿por qué razón?

HISTORIA DE LAS PALABRAS

La palabra "ruleta" proviene del francés "*roulette*" y éste a su vez de "*rouler*" (del latín "*rotulāre*"), que significa "ruedita" o "rueda pequeñita".

Las reglas de la ruleta fueron escritas por el eminente matemático francés Blaise Pascal (1623-1662). Su invento se rodeó de cierto misticismo, puesto que se proponía un juego armoniosamente equilibrado, pero conteniendo el famoso número místico, puesto que la suma de

$$1+2+\ldots+36=666$$

La ruleta es el juego de azar tradicional de los casinos y fue juego de nobles en el medievo.

1. El experimento consiste en depositar las 7 bolas en una caja o bolsa y realizar dos extracciones, dejando fuera la primera bola. En cada extracción deben anotar el color de las bolas extraídas.

Antes de iniciar, cada equipo deberá anotar en sus cuadernos el resultado que crean aparecerá con más frecuencia al extraer las dos bolas. Cada equipo realizará 12 pares de extracciones y anotarán el resultado.

a. Con esta información respondan a las preguntas.
- ¿Cuál fue el resultado que más apareció?
- ¿Es el mismo que el preferido?
- ¿Por qué consideran que sucede esto?

b. Ahora listen todos los posibles resultados al extraer las dos bolas y anotar su color; por ejemplo:
{(V1, V1), (V1, V2),...,(V1, A4), (V2, V1); (V2, V2); (V2, A4),...}
- ¿Cuantos resultados posibles hay?

c. De estos resultados, agrupen ahora los que correspondan a los resultados siguientes.
- Ambas de distinto color.
- 2 verdes.
- 2 azules.

d. Con la información anterior, respondan las preguntas.
- ¿Cuál es la probabilidad de cada uno de estos resultados?
- ¿Coincide el resultado más probable con el que más salió?, ¿por qué?
- ¿Cuál fue un pronóstico supersticioso?
- ¿Cuál será un pronóstico objetivo?
- ¿El espacio muestral de este juego es o no es equiprobable?, ¿por qué?
- ¿Se trata de un juego legal?, ¿por qué razón?

Con la orientación de su profesor, expongan sus conclusiones en una discusión entre el grupo.

PARA RESOLVER

Lee el problema y resuelve en tu cuaderno lo que se solicita.

Uno de los juegos más conocidos es la ruleta, que consiste en un círculo que se divide en 37 sectores, numerados del 1 al 36 e iluminados de color rojo y negro, alternadamente, y a los cuales se añade el 0 para sesgar un poco la probabilidad de ganar. Se echa a girar el disco de la ruleta y a la vez se lanza una pequeña bola en sentido contrario al giro, la cual salta de sector en sector, hasta que se detiene en uno, cuyo número es el ganador.

Se puede imitar la ruleta si se tiene una urna con 37 bolitas de papel, todas iguales y numeradas 0, 1R, 2N, 3R, hasta el 35N y 36R. Se extrae al azar una bolita de papel y ese será el número ganador. Se puede apostar a un número, a dos o más y también al color.

1. Enumera el espacio muestral de este experimento (la ruleta).
   a. ¿Es un espacio equiprobable?
   b. ¿Cuál será la probabilidad de acertar a un determinado número, como por ejemplo el 7R?
   c. Si el apostador apuesta a un solo número, ¿cuál es la probabilidad de que la casa gane?
   d. ¿Cuál es la probabilidad de ganar si se apuesta al color rojo?
   e. ¿Cuál es la probabilidad de perder si se apuesta al color rojo?
   f. ¿El espacio muestral de este juego es o no es equiprobable?, ¿por qué?
   g. ¿Se trata de un juego legal?, ¿por qué razón?

Comenta con tus compañeros si existen otros juegos de azar como la ruleta y si en ellos también puedes aplicar los mismos criterios de probabilidad.

Reto

Responde lo que se indica.

¿Qué modificaciones físicas harías a un par de dados para que los resultados fueran equiprobables?

LECTURALIA

El creador de la cibernética, Norbert Wiener escribió su autobiografía en el libro *Ex prodigio: mi infancia y juventud*, donde relata su infancia y sus estudios de las matemáticas, además de comentar cómo conoció a importantes personalidades y de qué manera influyeron en él.

PARA TERMINAR

Con la coordinación de su profesor, reúnete con un compañero para desarrollar la actividad siguiente.

1. Cada pareja tendrá un par de dados. El juego consiste en lanzarlos y anotar el resultado de la suma de las caras que resulten hacia arriba. Antes de hacerlo, cada pareja deberá anotar en un cuaderno el resultado que crea que aparecerá con más frecuencia al tirar los dos dados.
2. Repitan el lanzamiento 10 veces y anoten el resultado en cada ocasión. Ganará la pareja del equipo que haya acertado en su predicción el mayor número de veces.
3. Listen en el pizarrón el número que propuso cada pareja y todos los resultados obtenidos, de tal forma que se obtengan dos datos: el número que más propusieron y el número que más salió al lanzar los dados.
   a. ¿Cuál fue el resultado que más apareció?
   b. ¿Es el mismo que el preferido?
   c. ¿Por qué creen que sucede esto?
4. Ahora listen en un recuadro todos los posibles resultados al lanzar dos dados. Llenen los cuadros faltantes con los posibles resultados.
   a. ¿Cuántos posibles resultados son?
   b. ¿Es alguno de ellos más probable de aparecer que otro en un lanzamiento?

(1,1)	(1,2)				(1,6)
(2,1)	(2,2)				(2,6)
(5,1)				(5,5)	
					(6,6)

5. Ahora agrupen, de estos resultados, los que correspondan al resultado cuya suma sea 2, 3, 4... y hasta 12. Calculen la probabilidad de cada resultado.
   a. ¿Coincide el resultado más probable con el que salió más?, ¿por qué?
   b. ¿Cuál fue un pronóstico basado en suposiciones?
   c. ¿Cuál será un pronóstico objetivo?

Expongan sus conclusiones en una discusión con el grupo, orientados por su profesor. En caso de haber dudas, consulten con su profesor.

Autoevaluación

Lee en la primera columna los aspectos que vas a evaluar y marca con una equis (✘) el resultado que obtuviste de acuerdo con tu opinión. Sigue el mismo procedimiento que en los bloques anteriores.

	Según mi opinión			Según la opinión de mis compañeros			Recomendaciones de mi profesor
	Sí	Aún tengo dudas	No	Sí	Aún tiene dudas	No	
Conocimientos y habilidades: Puedo resolver y plantear problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.							
Puedo resolver problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Puedo anticipar cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.							
Puedo leer y representar, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.							
Puedo resolver problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.							

Evaluación

Lee y contesta las preguntas como se indica en cada caso.

Patrones y ecuaciones

5.1 Un comerciante compró dos tipos de café, uno le costó \$50 pesos por kilo y el otro \$60.

PREGUNTA 1 ¿Cuántos kilos debe mezclar de cada tipo de café para obtener 60 kg de mezcla y venderlos a \$55 el kilo?

- **a.** 20 kg de \$50 y 40 kg de \$60.
- **b.** 15 kg de \$50 y 45 kg de \$60.
- **c.** 30 kg de \$50 y 30 kg de \$60.
- **d.** 10 kg de \$50 y 40 kg de \$60.

5.2 En una tienda se ofrece el juego de vestir, traje, camisa y corbata, con 7% de descuento.

PREGUNTA 2 ¿Cuál de las expresiones representa lo que pagará un cliente por uno de los juegos de vestir?

- **a.** $0.07x - x = 1238$
- **b.** $x - 0.07x = 1238$
- **c.** $7x = 1238$
- **d.** $x - 1238 = 7\%$

5.3 Una cancha escolar de futbol rápido mide aproximadamente tres veces más de largo que de ancho y su área es de 147 m².

PREGUNTA 3 Plantea una ecuación que permita determinar las medidas de la cancha.

PREGUNTA 4 ¿Cuánto mide el perímetro de la cancha?

- **a.** 56 m
- **b.** 115 m
- **c.** 82 m
- **d.** 74 m

Medida

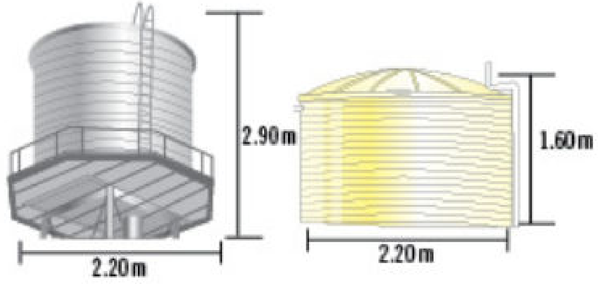
5.4 Al hacer cortes por planos paralelos u oblicuos a un cilindro o a un cono recto se obtienen diferentes secciones.

PREGUNTA 5 ¿Cómo se puede cortar un cilindro y un cono de tal forma que se obtengan las mismas secciones?

5.5 El volumen de un tanque para almacenar agua mide 254 469.6 cm³ y su altura 90 cm.

PREGUNTA 6 ¿Cuánto mide el diámetro del tanque?

5.6 A continuación se muestran diferentes cisternas con sus respectivas medidas. Como se puede observar, la altura de la cisterna de 5 000 l aumenta $\frac{29}{16}$ veces con respecto a la cisterna de 1 0000 l.



PREGUNTA 7 ¿Cuánto varía el volumen de una cisterna con respecto a la otra?

Proporcionalidad y funciones

5.5 Al lanzar un objeto hacia arriba, la altura que alcanza depende del tiempo transcurrido, aunque se debe considerar que interviene la aceleración de la gravedad.

$$a(t) = vt - \frac{1}{2} gt^2$$

Supongamos que se lanza una pelota hacia arriba a una velocidad de 10 m/s² y se obtiene lo siguiente.

Tiempo (s)	0	0.5	1	1.5	2
Altura (m)	0	3.775	5.1	3.975	0.4

PREGUNTA 8 Considerando que la aceleración de la gravedad es 9.81 m/s², ¿cuál es la expresión que representa la variación de la altura en función del tiempo?

5.8 Una fábrica produce n platos y m tazas a la semana. El precio de cada taza es de \$9 y el de cada plato es de \$12.

PREGUNTA 9 Suponiendo que la fábrica logra colocar toda la mercancía, ¿cuál es la función que representa el ingreso semanal por ventas?

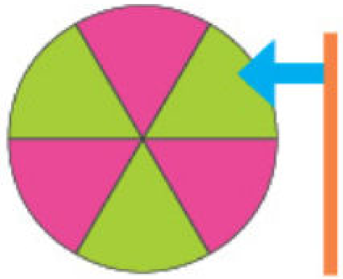
- **a.** $I(x) = n + m$
- **b.** $I(x) = 9n + 12m$
- **c.** $I(x) = (9 + 12)(n + m)$
- **d.** $I(x) = 12n + 9m$

Nociones de probabilidad

5.9 Una caja contiene 20 fusibles, de los cuales 6 están defectuosos.

PREGUNTA 10 Si se extraen 3 fusibles sin reemplazarlos cada vez, ¿cuál es la probabilidad de extraer los 3 fusibles defectuosos?

5.10 En una feria, uno de los puestos muestra una ruleta giratoria. Los visitantes de la feria pueden apostar por alguno de los colores y si éste resulta ganador, pueden elegir un premio.



PREGUNTA 11 ¿Qué se puede afirmar de este juego?

- **a.** Es equiprobable.
- **b.** No es legal.
- **c.** Es legal y equiprobable.
- **d.** Es legal y no equiprobable.

5.11 En una urna se colocan 8 bolas azules, 12 blancas y 32 negras. Manuel apuesta a que saldrá una bola negra y Lucía a que será blanca.

PREGUNTA 12 ¿Qué probabilidad de perder tiene Manuel?

PREGUNTA 13 ¿Qué habría qué hacer para que tanto Manuel como Lucía tuvieran la misma probabilidad de ganar?

BIBLIOGRAFÍA PARA EL ESTUDIANTE

- Asimov, I. (2011). *Grandes ideas de la ciencia*. España: Alianza Editorial.
- Bosch C. y Gómez C. (2002). *Una ventana a las incógnitas*. México: Santillana.
- Collantes, J. y Pérez, A. (2009). "La última noche de Cardano". *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 50. Barcelona: Graó.
- Cerasoli A. y Agliardi A. (2007). *La sorpresa de los números: un viaje al fascinante universo de las matemáticas*. México: SEP / Maeva.
- Ernst, B. (2007). *El espejo mágico*. Alemania: Taschen.
- Jouette, A. (2004). *El secreto de los números*. México: Robinbook.
- Marván, L. (2002). *Andrea y las fracciones*. México: SEP/Santillana.
- Markushevich, A. (1977). *Curvas maravillosas, números complejos y representaciones conformes*. Moscú: MIR.
- Masaichiro A. y Mitsumasa A. (2007). *El misterioso jarrón multiplicador*. México: SEP/FCE.
- Noreña, F. y Tonda, J. (2002). *La medición y sus unidades*. México: SEP/Santillana.
- Paenza, A. (2005). *Matemática... ¿estás ahí?* Argentina: Siglo XXI (La ciencia que ladra).
- -- (2010). *Matemática... ¿estás ahí? La vuelta al mundo en 34 problemas y 8 historias*. Argentina: Siglo XXI (La ciencia que ladra).
- Pascual, R. *et. al.* (2007). *Apuntes de matemáticas*. México: SEP/Parramón Ediciones.
- Perelman, Y. (2011). *Álgebra recreativa*. México: Quinto Sol.
- --- (s.f.). *Geometría recreativa*. México: Quinto Sol.
- --- (2010). *Física recreativa*. México: Quinto Sol.
- Pérez, M. (2009). *Una historia de las matemáticas: retos y conquistas a través de sus personajes*. Madrid: Visión Libros.
- Ruiz, C. y De Regules, S. (2002). *Crónicas algebraicas*. México: SEP/Santillana.
- --- (2002). *Crónicas geométricas*. México: SEP/Santillana.
- Tanur, J. (1992). *La estadística. Una guía de lo desconocido*. Madrid: Alianza.
- Wylie, C.R. (2005). [Ciento un] *101 desafíos a la lógica*. México: SEP/Suromex.
- Wiener, N. (1982). *Ex prodigio: mi infancia y juventud*. México: Conacyt.

BIBLIOGRAFÍA PARA EL PROFESOR

- Alanís, J. *et al.* (2008). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.
- Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). "Matemática educativa. Una visión de su evolución". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6, pp. 27–40.
- Espinosa, H. *et al.* (2000). *Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Educación Secundaria*. México: SEP.
- Ursini, S. *et al.* (2005). *Enseñanza del Álgebra Elemental. Una propuesta alternativa*. México: Trillas.
- Zubieta, G. *et al.* (2000). *Geometría Dinámica*. EMAT. México: SEP.

BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS EN LÍNEA CONSULTADAS

- Apostol, T. (2006). *Cálculus II. Cálculo con funciones de varias variables y álgebra lineal, con aplicaciones diferenciales y las probabilidades*. Barcelona: Reverte.
- Baldor, A. (2008). *Geometría y Trigonometría*. México: Grupo Patria Cultural.
- Barnett, R. y Ziegler, R. (2000). *Álgebra*. México: McGraw-Hill.
- Berciano, A. (s.f.). *Matemáticas en el antiguo Egipto*. País Vasco: Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea.
- Cardona, R. (2012). *Una propuesta para la enseñanza de la derivada como razón de cambio a estudiantes de grado undécimo*. Colombia: Universidad Nacional de Colombia.
- Contreras, F. *et al.* (2002). "Teoría de juegos". Argentina: Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Mendoza.
- De Benito, José I. (2004). *El gran libro de las citas y frases célebres*. España: Editorial Libsa/Diana.
- Flores, F. (2008). *Historia y didáctica de la trigonometría*. España: Publicatuslibros.com.
- Haub, R. (2000). *Christoph Scheiner: el pantógrafo* (conferencia). Alemania: Kurt Scheurer (Colección de materiales de arqueología e historia de la ciudad y la región de Ingolstad).
- Hernández, G. F. J. *et al.* (2010). *Directorio de citas filosóficas fundamentales en sus textos*. Madrid: Maia.
- Lehmann, C. (2012). *Geometría Analítica*. México: Limusa.
- Maza, C. (2000). *Las matemáticas de la antigüedad y su contexto histórico*. Sevilla: Universidad de Sevilla.
- Puig, L. (s.f.). *Componentes de una historia del álgebra. El texto de Al-Khwarizmi restaurado*. Valencia: Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Valencia.
- Rey, J. *et al.* (2000). *Historia de la matemática*. vol I. *De la Antigüedad a la baja Edad Media*. Barcelona: Gedisa.
- -- (2000). *Historia de la matemática*. vol II. *Del Renacimiento a la actualidad*. Barcelona: Gedisa.
- Ruiz, Á. (2012). *Historia y filosofía de las matemáticas*. Costa Rica: EUNED.
- Salinero, P. (s.f.). *Historia de la teoría de la probabilidad*. Madrid: Universidad Autónoma de Madrid.
- Santos L. (2007). *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos*. México: Trillas/ BANPM
- Vitancurt, F. (2014). *Galileo Galilei (1564-1642)*. Uruguay: Consejo de Formación en Educación.
- Wyllys, R. (2011). "*Resources on Adolphe Quetelet: statistician, sociologist, demographer*". Estados Unidos de América: Escuela de Información de la Universidad de Texas en Austin.
- Centro Virtual de Divulgación de las Matemáticas. Disponible en http://www.divulgamat.net/
- Instituto de Matemáticas de la UNAM. Disponible en http://www.matem.unam.mx/
- Mathematical Association of America. Disponible en http://www.maa.org/
- Proyecto Descartes. Disponible en http://proyectodescartes.org/
- *TimeRime*. Disponible en http://timerime.com/es/

Distribución gratuita
Prohibida su venta

ISBN 978-607-7586-48-7

9 786077 586487 >

ríosdetinta

¿Se puede calcular la anchura de un río si sólo conocemos las medidas de una de sus orillas?, ¿por qué los triángulos son la figura más utilizada en la arquitectura contemporánea?, ¿cómo funciona un proyector?, ¿es posible calcular la probabilidad de que en un juego de lotería salga uno u otro número?, ¿cómo se puede calcular la distancia entre el centro del Sol y el centro de la Tierra? Para resolver estas y otras preguntas es necesario dominar el lenguaje matemático. Gracias a él, es posible solucionar cualquier interrogante y resolver los problemas de la vida cotidiana con base en cálculos y operaciones aritméticas, geométricas, trigonométricas y algebraicas. En este libro, *Matemáticas 3*, se encuentran los planteamientos necesarios para responder a cada una de estas preguntas.

Este título completa la serie y ofrece una propuesta metodológica que permite trabajar cada uno de los temas de manera progresiva.